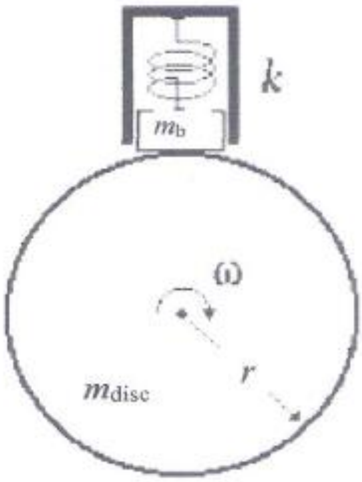
Dinamica rotazionale e Termodinamica

Un particolare sistema frenante

Problema(1)



Un disco omogeneo di rame di raggio r e massa m_{disco} è inizialmente in rotazione oraria con velocità angolare costante di modulo ω attorno ad un asse fisso orizzontale, perpendicolare al disco e passante per il suo centro. Per fermare il disco viene azionato un freno verticale che consiste in un blocco di materiale isolante termico di massa m_b che si può muovere senza attrito lungo un cilindro di sezione S a pareti adiabatiche contenente n moli di un gas ideale. Una molla di costante elastica k, volume e massa trascurabili, e lunghezza a riposo l_0, è contenuta nel cilindro. La molla risulta compressa di una quantità costante Δl e spinge verticalmente dall'alto il blocco di rame sul disco.

Indicando con μ_d il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e disco, sapendo che il disco si ferma dopo un tempo $t_{frenata}$ in cui ha compiuto L giri e che la temperatura del gas ideale è T_0, calcolare:

1) il modulo della velocità angolare ω;
2) il numero di giri L prima di fermarsi.

Supponendo inoltre che tutta l'energia dissipata vada solamente a scaldare uniformemente il disco, calcolare:

a) l'aumento di temperatura subito dal disco.

Dati:r=0,5m, m_{disco}=20Kg, m_b=1Kg, k=10^3N/m, l_0=50cm, $\Delta l = 10cm$, n=0,05moli, T_0=300K, μ_d =0,2, $t_{frenata}$ =2s, $I_{disco,CM} = \frac{1}{2}mr^2$, calore specifico del rame c_{Cu}=385J/(Kg K), R=8314 J/(mol K)

Risoluzione

Strategia risolutiva

Per risolvere il problema si devono tenere presenti diversi aspetti:

a) Il moto del disco durante la frenata avviene con decelerazione angolare costante impiegando un tempo di frenata noto. Quest'informazione permetterà di scrivere una prima relazione tra il valore della velocità angolare iniziale ω, il modulo della decelerazione angolare α e il tempo di frenata.
b) E' necessario mettere a confronto il momento della forza di attrito frenante con il momento d'inerzia e l'accelerazione angolare. Si tenga presente che le forze che contribuiscono a determinare la forza di attrito complessiva agente tangenzialmente tra le superfici a contatto del

(1) Il testo di questo problema è riportato come Esercizio 3 nel Compito A1 - dell'Esame di Fisica I del 19-luglio-2018- Seconda Prova scritta, presso il Politecnico di Torino - Ing. Gestionale. L'immagine riportata è parte integrante del suddetto testo.

blocco e del disco sono tre: $\mathbf{F_1}$, il peso del blocco di massa m_b=1Kg, $\mathbf{F_2}$ dovuta alla compressione della molla (legge di Hooke) ed $\mathbf{F_3}$ dovuta alla pressione del gas contenuto nel cilindro. Per utilizzare proficuamente la legge dei gas PV=*n*RT riterremo che il cilindro abbia area di base uguale a quella della superficie di contatto tra il blocco e il disco rotante ; ciò è giustificato dall'informazione contenuta nel testo in cui si precisa che il blocco può scivolare nel cilindro senza attrito (in realtà, durante l'azione meccanica il blocco risulterà fermo rispetto al cilindro) e inoltre che l'**altezza** della parte **del cilindro contenente il gas sia uguale alla lunghezza della molla compressa** (come si evince dalla figura riportata).

c) Dalla figura fornita si evince che le tre forze agiscono perpendicolarmente alla superficie di contatto tra blocco e disco e sono dirette verso il basso, conseguentemente, conoscendo il coefficiente di attrito dinamico, si troverà l'intensità della forza di attrito agente sul disco e quindi si determinerà il suo momento rispetto all'asse di rotazione il cui valore sarà uguagliato al prodotto del momento d'inerzia per il modulo della decelerazione angolare α.

d) Infine, poiché nel testo si suggerisce che tutta l'energia meccanica dissipata sarà completamente assorbita dal disco (di rame) si uguaglierà il valore dell'energia cinetica rotazionale iniziale $E_{cin.} = \frac{1}{2} I\omega^2$ alla corrispondente quantità di calore assorbita dal disco $Q = c_{Cu} m_{disco} \cdot \Delta T$ per determinare la variazione di temperatura subita dal disco.

Elaborazioni

a) La **legge della velocità angolare nel moto** di frenata è $\omega = \omega_i - \alpha t$, essendo ω_i il modulo della velocità angolare iniziale del disco e α il modulo della decelerazione angolare, avendo poto *t*=0s l'istante in cui inizia la frenata. Sapendo che il disco si arresta nell'istante $t = t_{frenata}$ sussiste l'uguaglianza $\omega_i - \alpha t_{frenata} = 0$, da cui

$$\omega_i = \alpha t_{frenata} \qquad (1)$$

Possiamo anche scrivere l'uguaglianza

$$\alpha = \frac{\omega_i}{t_{frenata}} \qquad (1.1)$$

b) Intensità della forza di attrito frenante

a. Il peso del blocco di massa m_b ha modulo $F_1=m_b g$, con g=9,81ms^{-2} accelerazione di gravità.. La molla esercita sul blocco che assicura il contatto con il disco la forza elastica di intensità $F_2 = F_{el} = k \cdot \Delta l$ (legge di Hooke), con *k* e Δl grandezze note.

b. Il gas presente nel cilindro è ideale, quindi sussiste la legge dei gas perfetti PV=*n*RT, dove P,V e $T=T_0$ sono le coordinate termodinamiche del gas, *n* il numero di moli ed *R* la costante dei gas perfetti. La pressione P del gas esercita sulla base di area S del blocco (che chiude ermeticamente il cilindro) la forza F_3=P·S, quindi

con $P = \frac{nRT_0}{V}$ si ricava $F_3 = \frac{nRT_0}{V} \cdot S$ (2)

I volume V del gas è uguale alla capacità del cilindro pari ad *Sh*, essendo *h* la misura della molla compressa $h = l_0 - \Delta l = 40cm$, dunque V=S ·*h*, per cui possiamo scrivere

$$\mathrm{F}_3 = \frac{nRT_0}{S \cdot h} \cdot S = \frac{nRT_0}{h} \tag{2.1}$$

L'intensità della forza totale che preme perpendicolarmente sulla superficie del disco rotante è

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = m_b g + k \cdot \Delta l + \frac{nRT_0}{h} \tag{3}$$

c) L'intensità della forza di attrito frenante il disco è

$$\mathrm{F}_{att} = \mu_d \cdot F = \mu_d \cdot \left(m_b g + k \cdot \Delta l + \frac{nRT_0}{h} \right) \tag{4}$$

d) Momento della forza frenante e relazione con il momento d'inerzia del disco e la decelerazione angolare α.

a. Il momento meccanico della forza frenante rispetto all'asse di rotazione del disco, il cui raggio è r, vale $M = \mathrm{F}_{att} \cdot r$ e detto valore deve coincidere con il prodotto $I\alpha$ del momento d'inerzia I del disco con il modulo del decelerazione angolare α. Il momento d'inerzia del disco va calcolato rispetto all'asse di rotazione e nel caso di un disco omogeneo di massa m e raggio r vale $I = \frac{1}{2}mr^2$. Sussiste dunque l'uguaglianza

$$M = I\alpha \rightarrow \mathrm{F}_{att} \cdot r = \frac{1}{2}mr^2\alpha \tag{5}$$

da cui $$\mathrm{F}_{att} = \frac{1}{2}mr\alpha \tag{5.1}$$

Uguagliando i secondi membri della (4) e della (5.1) e tenendo presente la (1.1) otteniamo

$$\mu_d \cdot \left(m_b g + k \cdot \Delta l + \frac{nRT_0}{h} \right) = \frac{1}{2}mr\alpha \rightarrow \mu_d \cdot \left(m_b g + k \cdot \Delta l + \frac{nRT_0}{h} \right) = \frac{1}{2}mr \cdot \frac{\omega_i}{t_{frenata}} \rightarrow$$

$$\omega_i = \mu_d \cdot \left(m_b g + k \cdot \Delta l + \frac{nRT_0}{h} \right) \cdot \frac{2 \cdot t_{frenata}}{mr}$$

Sostituiamo ora i valori noti delle grandezze per ottenere il valore della velocità angolare iniziale del disco.

$$\omega_i = 0,2 \cdot \left(1Kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2} + 10^3 \cdot \frac{N}{m} \cdot 0,1m + \frac{0,05mol \cdot 8,314\frac{J}{mol \cdot K} \cdot 300K}{0,4m} \right) \cdot \frac{2 \cdot 2s}{20Kg \cdot 0,5m} \approx 33,73\frac{rad}{s}$$

e) Calcolo del numero L di giri compiuti dal disco prima di fermarsi

a. Durante la frenata un punto del bordo del disco percorre la lunghezza lineare Δs pari al prodotto del numero di giri per la circonferenza del disco: Δs =L·2πr. La forza di attrito, che rimane costante durante la frenata, compie un lavoro negativo il cui modulo è

$$W = F_{att} \cdot \Delta s = F_{att} \cdot L \cdot 2\pi r \rightarrow L = \frac{W}{F_{att} \cdot 2\pi r} \tag{6}$$

Il valore W coincide con l'energia meccanica di rotazione del disco disponibile prima dell'inizio della frenata, quindi

$$W = E_c^i = \frac{1}{2} I \omega_i^2 \qquad (7)$$

Possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze

$$L = \frac{W}{F_{att} \cdot 2\pi r} = \frac{\frac{1}{2} I \omega_i^2}{F_{att} \cdot 2\pi r} \overset{(5.1)}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{mr^2 \omega_i^2}{mr^2 \alpha \cdot \pi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega_i^2}{\alpha \cdot \pi} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega_i^2}{\frac{\omega_i}{t_{frenata}} \cdot \pi} = \frac{33,73(rad/s) \cdot 2s}{4\pi} \approx 5,37 giri$$

f) Calcolo dell'aumento della temperatura del disco

Nel testo si suppone che il calore Q prodotto durante la frenata sia assorbito interamente dalla massa m_d del disco (questa supposizione è ragionevole considerata la brevità della frenata). L'assorbimento di tale calore determina nel disco la variazione di temperatura ΔT legata a Q dalla legge della calorimetria

$$Q = c_{Cu} \cdot m_d \cdot \Delta T \qquad (8)$$

Dobbiamo uguagliare la quantità di calore all'energia meccanica disponibile prima della frenata; in questo modo si ricava un'equazione dalla quale si determina ΔT.

$$c_{Cu} \cdot m_d \cdot \Delta T = \frac{1}{2} I \omega_i^2 \rightarrow \Delta T = \frac{\frac{1}{2} I \omega_i^2}{c_{Cu} \cdot m_d} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_d r^2 \cdot \omega_i^2}{c_{Cu} \cdot m_d} = \frac{r^2 \cdot \omega_i^2}{4 c_{Cu}} = \frac{(0,5m)^2 \cdot (33,73 rad/s)^2}{4 \cdot 385 J/(Kg \cdot K)} \approx 0,18K$$