Dinamica di oggetti collegati

Problema[1]

Una massa m_1 è collegata ad una massa m_2 come indicato nella figura riportata a lato. La puleggia che è fissata tramite una staffa al tavolo è formata da due cilindri coassiali intorno ai quali sono avvolte le funicelle da considerare di masse trascurabili ed i raggi dei due cilindri sono R_1 , di quello interno, R_2 di quello esterno. Il momento d'inerzia totale della puleggia rispetto al suo asse di rotazione è I e la rotazione del meccanismo avviene senza attrito. Il sistema è inizialmente fermo rispetto al tavolo, il cui piano è orizzontale. Nell'ipotesi che tra il piano del tavolo e la massa m_1 l'attrito sia trascurabile determinare:

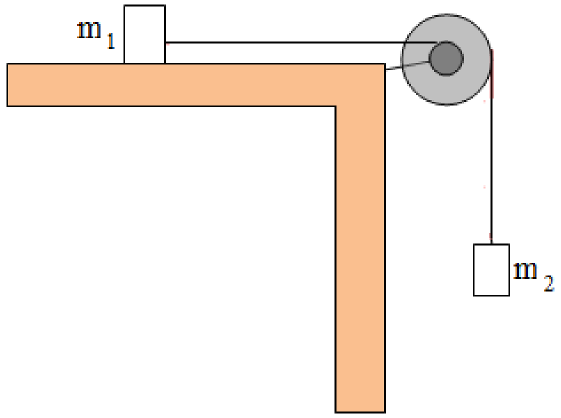

Figura 1

1. il modulo della velocità della massa m_2 dopo che è scesa di un tratto h;
2. le tensioni dei due fili durante il moto.
3. Determinare i valori delle grandezze richieste nei precedenti punti 1. e 2. nel caso particolare che risulti m_1=10Kg, m_2=4Kg, R_1=20 cm, R_2=50 cm, I=6Kg·m^2 , h=1m.[2]

Determinare il valore della velocità della massa m_2 richiesta nel precedente punto (1) nell'ipotesi che nel contatto tra la massa m_1 e la superficie del tavolo vi sia attrito (dinamico) con coefficiente μ=0,25.

Risoluzione

Premessa

Il moto del sistema è bidimensionale ed avviene nel piano verticale (ideale) contenente i baricentri delle due masse m_1, m_2. Per la descrizione del moto fissiamo il sistema di riferimento spazio-temporale ponendo t=0s l'istante di avvio del moto, scegliendo l'asse delle ascisse parallelamente alla superficie del tavolo ed orientato nel verso del moto della massa m_1, l'asse delle ordinate disposto secondo la verticale del luogo, orientato verso il basso ; l'origine O degli assi sia fissata nell'intersezione del piano del moto con l'asse di rotazione della puleggia (figura di riferimento). Volendo considerare una terna trirettangola come riferimento cartesiano precisiamo che l'asse z è entrante nel piano del foglio. Questa aggiunta è opportuna nell'analisi dei momenti delle forze agenti sulla puleggia.

Strategia risolutiva

Poiché il sistema meccanico non presenta alcun attrito evidentemente, lasciato libero, si muoverà con la massa m_1 che si sposterà nel verso dell'asse delle ascisse, la massa m_2 che si muoverà lungo la verticale verso il basso e la puleggia che entrerà in rotazione. I moti delle due masse saranno uniformemente accelerati ma avranno accelerazioni di diverso modulo e ciò a causa della struttura della puleggia che essendo composta da due cilindri coassiali e solidali aventi raggi di diversa misura farà sì che

---

[1] Il presente testo fa riferimento a quello del problema n.68 riportato a pag. 335 del testo Fisica, Volume 1, Seconda Edizione, Autori P. Mazzoldi, M. Nigro , C. Voci, del quale rappresenta una rielaborazione.
[2] Questi sono i valori delle grandezze assegnati nel testo del problema riportato nel libro descritto.

i rispettivi fili di trazione avvolti sugli stessi faranno percorrere alle due masse tratti rettilinei di diversa lunghezza in corrispondenza all' angolo di rotazione θ(t) di cui sarà ruotata la puleggia dopo t s. Anche la puleggia ruoterà con accelerazione angolare costante . Più precisamente, le lunghezze dei tratti percorsi dalle due masse saranno $l_1 = R_1 \cdot \theta(t)$, da m_1, $l_2 = R_2 \cdot \theta(t)$, da m_2 ed essendo $R_2 > R_1$ sarà anche $l_2 > l_1$.

Risolveremo il problema in esame applicando

- la seconda legge della dinamica a ciascuna delle due masse;
- la legge del momento totale delle forze applicate alla puleggia rotante ($\vec{M}_{tot.} = I \cdot \vec{\alpha}$);
- cercheremo infine la relazione tra i moduli delle accelerazioni $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ con cui si muoveranno le due masse m_1, m_2.

In tal modo ricaveremo un sistema di quattro equazioni nelle incognite a_1 , a_2 , T_1, T_2 (dove T_1, T_2 sono i moduli delle due tensioni dei fili di trazione), risolto il quale si potrà determinare anche il valore della velocità $\vec{V_2}$ della massa m_2 .

Elaborazioni

Risoluzione contestuale dei quesiti 1. e 2.

Facciamo riferimento alla Figura 2. Cominciamo con l'osservare le forze che agiscono sulle parti mobili.

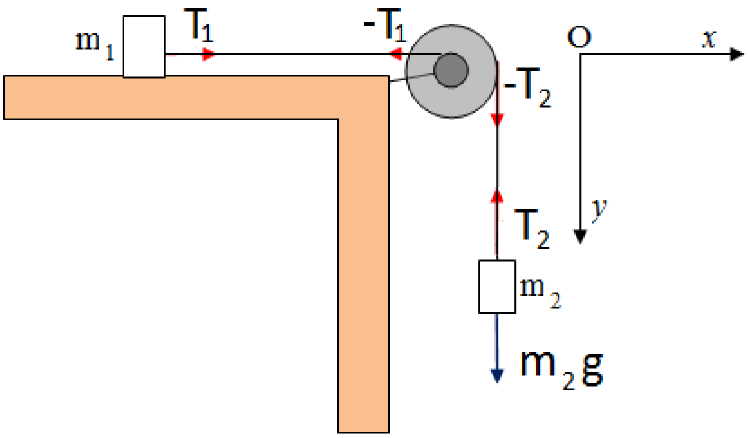

Figura 2

a) Sulla massa m_1 agiscono la forza peso $m_1 \vec{g}$ della stessa massa, diretta lungo la verticale e verso il basso, la tensione $\vec{T_1}$ esercitata dal filo di trazione avvolto sulla parte interna della puleggia e la reazione vincolare $\vec{N_1}$ esercitata dal piano di appoggio della massa, opposta alla forza peso della stessa. Poiché nella risoluzione dei quesiti 1) , 2) si suppone che l'attrito tra detta massa ed il piano sia trascurabile, la forza peso e la reazione vincolare non sono state riportate nella figura di riferimento e non hanno alcuna incidenza sul moto di m_1 e di tutto il sistema meccanico. L'unica forza responsabile del moto di m_1 è la tensione del filo cui è collegata e quindi, indicata con $\vec{a_1}$ l'accelerazione con cui si muove istantaneamente la massa, sussiste l' l'equazione vettoriale

$\vec{T_1} = m_1 \vec{a_1}$ (1) ,la cui proiezione scalare sull'asse delle ascisse è $m_1 a_1 = T_1$ (1.1)

b) Sulla massa m_2 agiscono la forza peso $m_2 \vec{g}$ della stessa massa, diretta lungo la verticale passante per il punto di sospensione della massa e orientata verso il basso e la tensione $\vec{T_2}$ esercitata dal filo di trazione avvolto sulla parte esterna della puleggia. Pertanto, indicata con $\vec{a_2}$ l'accelerazione con cui si muove istantaneamente la massa sussiste l' l'equazione vettoriale

$$m_2\vec{g}+\vec{T_2}=m_2\vec{a_2} \qquad (2)$$

la cui proiezione scalare sull'asse y è $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$ (2.1)

c) Sulla puleggia agiscono le due tensioni dei fili collegati alle masse, il peso della puleggia e la reazione vincolare esercitata dall'asse di supporto intorno al quale ruota la puleggia. La forza peso e la reazione vincolare sono opposte tra loro; comunque, l'ipotesi di trascurare ogni attrito nel contatto implica di trascurare ai fini dello studio del problema entrambe le forze. Analizziamo dunque gli effetti dei due fili sul moto della puleggia.
   a. Il filo collegato alla massa m_2 tende a srotolarsi sotto l'azione del peso della massa sospesa; la forza di tensione esercitata sulla superficie esterna della puleggia è opposta alla tensione $\vec{T_2}$ che lo stesso filo esercita sulla massa m_2. Questa forza provoca una rotazione nel verso orario della puleggia e quindi il suo momento, che valutiamo rispetto al centro all'asse di rotazione della puleggia, è negativo ed ha modulo R_2T_2.
   b. Il filo collegato alla massa m_1 invece tende ad avvolgersi sul cilindro più interno della puleggia (trascinato dalla rotazione della puleggia) e nel punto di contatto con la superficie della puleggia esercita la forza di tensione $-\vec{T_1}$. Il momento torcente di questa forza imprime alla puleggia una rotazione antioraria, quindi il momento è positivo e valutato sempre rispetto all'asse di rotazione della puleggia ha valore R_1T_1.

Complessivamente il momento totale delle forze agenti sulla puleggia coincide con la somma dei momenti delle due tensioni, che possiamo chiamare $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ e quindi, ricordando che la somma dei momenti di tutte le forze che agiscono su un corpo rigido è uguale al prodotto del momento d'inerzia del corpo valutato rispetto all'asse istantaneo di rotazione intorno a cui ruota il corpo con l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$, possiamo scrivere l'equazione

$$\vec{M}_1+\vec{M}_2=I\cdot\vec{\alpha} \qquad (3),$$

la cui forma scalare, proiettata lungo l'asse z (della terna trirettangola) è

$$M_1-M_2=-I\alpha \qquad (3.1)$$

perché il **vettore accelerazione angolare**, come del resto anche il vettore velocità angolare della puleggia, puntano **verso l'interno del foglio**.

Abbiamo indicato con α il modulo del vettore accelerazione angolare e con i simboli introdotti per le altre grandezze l'equazione (3.1) diventa

$$R_1T_1-R_2T_2=-I\alpha \qquad (3.2)$$

Ancora, è nota la relazione tra il modulo dell'accelerazione angolare della puleggia, il modulo dell'accelerazione lineare *a* di un punto della stessa non appartenente all'asse di rotazione e la misura del raggio della traiettoria descritta. Scegliendo come punto uno del bordo esterno della puleggia, al cui distanza è R_2, notiamo che il modulo dell'accelerazione lineare di detto punto è uguale a quello dell'accelerazione con cui scende la massa m_2, quindi possiamo scrivere l'uguaglianza

$$a_2=R_2\cdot\alpha$$

L'equazione (3.2) assume la seguente forma

$$R_1T_1 - R_2T_2 = -I \cdot \frac{a_2}{R_2} \qquad (3.3)$$

Ricerca della relazione tra i moduli delle accelerazioni delle due masse

Sia $\theta(t)$ l'ampiezza assoluta espressa in radianti dell'angolo descritto nella rotazione dalla puleggia dopo t secondi dall'inizio del moto. Un punto del bordo del cilindro più interno della puleggia avrà descritto un arco di misura $l_1 = R_1 \cdot \theta(t)$; anche la massa m_1 si sarà spostata sul tavolo dello stesso tratto lineare e quindi il modulo della sua velocità sarà

$$V_1 = R_1 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = R_1 \cdot \dot{\theta}(t) \qquad (4)$$

Analogamente, un punto del bordo del cilindro esterno della puleggia avrà descritto un arco di circonferenza di misura $l_2 = R_2 \cdot \theta(t)$ e la massa m_2 sarà scesa di un tratto lineare lungo la verticale avente la stessa misura; deduciamo che il modulo della velocità V_2 di detta massa sarà

$$V_2 = R_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = R_2 \cdot \dot{\theta}(t) \qquad (5)$$

Nelle relazioni (4) e (5) $\dot{\theta}(t)$ rappresenta il modulo della velocità angolare istantanea della puleggia e dunque la sua derivata prima, cioè

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = \alpha(t), \qquad (6)$$

fornisce il modulo dell’accelerazione angolare istantanea della puleggia.

I moduli delle accelerazioni lineari istantanee $a_1(t)$, $a_2(t)$ con cui si muovono rispettivamente le masse m_1 , m_2 sono uguali rispettivamente ai moduli delle accelerazioni tangenziali di ciascun punto del cilindro interno e di ciascun punto del cilindro esterno della puleggia, i cui valori sono rispettivamente $R_1 \cdot \alpha(t)$, $R_2 \cdot \alpha(t)$. Sussistono dunque le uguaglianze

$$a_1(t)=R_1 \cdot \alpha(t), \qquad a_2(t)=R_2 \cdot \alpha(t) \qquad (7)$$

Eseguendo il rapporto membro a membro delle relazioni (7) otteniamo la relazione tra i moduli delle accelerazioni con cui si muovono le due masse:

$$\frac{a_1(t)}{a_2(t)} = \frac{R_1 \cdot \alpha(t)}{R_2 \cdot \alpha(t)} = \frac{R_1}{R_2}, \text{ brevemente } \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (8).$$

La (8) è la relazione cercata.

Risoluzione numerica finale del problema

Mettendo ora a sistema le equazioni (1.1) $m_1a_1 = T_1$, (2.1) $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$, (3.3) $R_1T_1 - R_2T_2 = -I \cdot \frac{a_2}{R_2}$ e (8) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2}$, si ottiene un sistema che risolto permette di ricavare i valori delle quattro grandezze a_1 , a_2 , T_1, T_2 . Seguono le elaborazioni.

$$\begin{cases} m_1a_1 = T_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2a_2 \\ R_1T_1 - R_2T_2 = -I \cdot \frac{a_2}{R_2} \\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 \cdot a_1 = T_1 \\ m_2 g - m_2a_2 = T_2 \\ R_1 \cdot m_1 \cdot a_1 - R_2\left(m_2 g - m_2a_2\right) = -I \cdot \frac{a_2}{R_2} \rightarrow \\ a_1 = \frac{R_1}{R_2} \cdot a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \cdot a_1 = T_1 \\ m_2 g - m_2a_2 = T_2 \\ R_1 \cdot m_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot a_2 - R_2\left(m_2 g - m_2a_2\right) = -I \cdot \frac{a_2}{R_2} \rightarrow a_2\left(m_1\frac{R_1^2}{R_2} + R_2m_2 + \frac{I}{R_2}\right) = R_2m_2 g \rightarrow \\ a_1 = \frac{R_1}{R_2} \cdot a_2 \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{R_2^2 m_2 \cdot g}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2^2 m_2 \cdot g}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} = \frac{R_1R_2}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} \cdot m_2 g \\ T_1 = m_1 \cdot a_1 = \frac{R_1R_2m_1}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} \cdot m_2 g \\ T_2 = m_2 g - m_2a_2 = m_2\left(g - \frac{R_2^2 m_2 \cdot g}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}\right) = \frac{m_1R_1^2 + I}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} \cdot m_2 g \end{cases}$$

Calcolo della velocità richiesta per la massa m_2

Abbiamo precisato che il moto di ciascuna massa è uniformemente accelerato. Per quanto concerne la massa m_2, il moto avviene lungo l'asse delle ordinate del riferimento adottato: supponiamo che sia y_0 l'ordinata del centro della massa dal punto in cui inizia la discesa.

Con i simboli introdotti fin qui, le leggi orarie del modulo della velocità e della posizione y del centro della massa sono

$V_2(t) = a_2 t$, per la velocità, (9)

$y(t) = y_0 + \frac{1}{2}a_2t^2$, per la posizione. (10)

Determiniamo l'istante t in cui la massa sarà scesa di h metri ponendo $y(t)=y_0+h$ e risolvendo l'equazione nella variabile t. Si ha

$$y_0 + \frac{1}{2}a_2t^2 = y_0 + h \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a_2}}$$

Sostituendo questo valore nella legge della velocità si ricava il valore richiesto.

$$V_2 = a_2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{a_2}} = \sqrt{2a_2 h}\ .$$

Quesito 3

Con i valori assegnati nel testo si ricavano i seguenti valori per le grandezze richieste:

$$a_2 \approx 1{,}326\frac{m}{s^2}; \quad V_2 = \sqrt{2a_2 h} \approx \sqrt{2 \cdot 1{,}326\frac{m}{s^2} \cdot 1m} = 1{,}628\frac{m}{s};$$

$$T_1 \approx 53{,}03N; \quad T_2 \approx 33{,}94N; \ a_1 = T_1 / m_1 \approx 5{,}30\frac{m}{s^2}.$$

ULTIMA PARTE DEL PROBLEMA

Si deve studiare il problema dal punto di vista dinamico nell'ipotesi in cui tra la massa m_1 e la superficie del tavolo sia presente attrito, in particolare con coefficiente μ=0,25.

Osserviamo innanzitutto che dal particolare valore 0,25 per il coefficiente si deduce che si tratta di attrito dinamico (radente), spieghiamo perché. L'intensità massima della forza di attrito che si può generare tra la massa m_1 e la superficie di appoggio si ha quando il piano della superficie su cui poggia la massa è orizzontale e l'intensità della forza di attrito è $F_{att} = \mu m_1 g = 0{,}25 \cdot 10Kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \approx 24{,}53N$; questo valore risulta essere minore dell'intensità della forza di trazione T_1 agente su m_1 in assenza di attrito che abbiamo visto essere T_1=53,03N, perciò la massa non viene bloccata. Dunque in presenza della forza di attrito suddetta che si oppone al moto di m_1 il moto del sistema meccanico causato dal peso della massa m_2 ha comunque luogo.

Ciò premesso, la risoluzione del problema in presenza di attrito differisce dal caso trattato per l'aggiunta della citata forza di attrito su m_1 diretta parallelamente alla superficie di appoggio e orientata nel verso opposto al moto. Applicando la seconda equazione della dinamica alle due masse m_1, m_2 e la legge dei momenti alla puleggia, con gli stessi simboli e lo stesso sistema di riferimento cartesiano Oxy le relazioni che si ottengono sono:

per la massa m_1 (1.1.1) $m_1 a_1 - \mu m_1 g = T_1$,

per la massa m_2 ancora la (2.1) $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$,

per la puleggia ancora la (3.3) $R_1 T_1 - R_2 T_2 = -I \cdot \frac{a_2}{R_2}$,

ancora la (8) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2}$, per il confronto delle accelerazioni delle due masse.

Risolvendo il sistema di equazioni così formato si ricava (si omettono i calcoli)

$$a_2 = \frac{(m_2 R_2 - \mu m_1 R_1) \cdot g R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} = \frac{(4 \cdot 0{,}5 - 0{,}25 \cdot 10 \cdot 0{,}2) \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5}{10 \cdot 0{,}2^2 + 4 \cdot 0{,}5^2 + 6}\frac{m}{s^2} \approx 0{,}994\frac{m}{s^2}; T_2 = m_2(g - a_2) \approx 35{,}26N;$$

$t = \sqrt{\frac{2h}{a_2}} \approx 1,418s$ (tempo di discesa per la massa m_2); $V_2 = \sqrt{2a_2h} \approx 1,41\frac{m}{s}$.