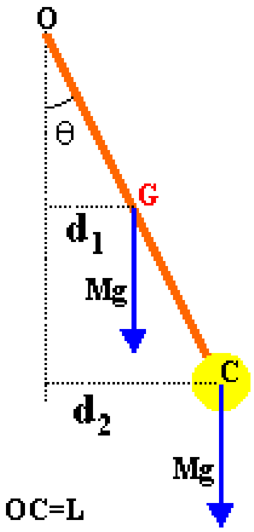
Dinamica Rotazionale
ENDOLO FISICO

Problema
Un pendolo fisico è costituito da un'asticella omogenea di lunghezza $l = 28cm$ e massa M incernierata in suo estremo nel punto O. All'altro estremo è fissato un disco omogeneo di massa M, raggio $r = l/8$, con l'estremo della barretta coincidente con il centro C del disco; il piano del disco è quello verticale in cui oscilla insieme alla barretta.

a) Determinare il periodo d'oscillazione del pendolo.
b) Nell'ipotesi che un orologio a pendolo funzioni con il meccanismo indicato, valutare l'eventuale errore nelle 24 ore di un giorno.

Elaborazioni

In riferimento alla figura riportata a lato, supponiamo di aver fissato un sistema di misura per l'angolo θ che l'asticella del pendolo forma con la verticale OH passante per il punto di sospensione O.



Notiamo che se l'asticella e il disco sono al di fuori della verticale OH allora i rispettivi pesi tendono a far ruotare il sistema delle due masse richiamandolo verso la verticale. Il moto che ne risulta è rotatorio attorno alla retta per O e perpendicolare al piano delle oscillazioni e presenta un'accelerazione angolare α che varia istante per istante.

E' noto che il momento delle forze agenti sul sistema meccanico, valutato rispetto all'asse di rotazione, è legato all'accelerazione angolare tramite il momento d'inerzia del sistema meccanico dalla legge

$$\tau = I\alpha \,, \qquad (1)$$

essendo ***I*** il momento d'inerzia del sistema rispetto allo stesso asse. ***I*** è dato dalla somma del momento d'inerzia (I_b) della barretta con il momento d'inerzia del disco (I_d).

Per una barretta omogenea di massa M e lunghezza L, il momento d'inerzia rispetto ad un asse baricentrale perpendicolare alla dimensione della barretta è

$$I_{bCM} = \frac{1}{12}ML^2$$

e applicando il teorema di Steiner (dell'asse parallelo) si determina il momento d'inerzia I_b . Risulta

$$I_{bO} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Il momento d'inerzia del disco, considerato omogeneo, rispetto ad un asse baricentrale perpendicolare al piano del disco è $I_{dCM} = \frac{1}{2}MR^2$ e sempre per il teorema di Steiner, dato che la distanza del centro di massa del disco dall'asse di rotazione è uguale alla lunghezza L dell'asticella, il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è

$$I_{dO} = I_{dCM} + ML^2$$

Ricordando la relazione tra il raggio R del disco e la lunghezza L dell'asticella possiamo scrivere

$$I_{dO} = I_{d\,CM} + ML^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{8}\right)^2 + ML^2 = \frac{129}{128}ML^2$$

Notiamo che le due forze producono momenti concordi rispetto all'asse di rotazione e quindi il modulo τ del momento totale è:

$$\tau = M_O = Mg \cdot d_1 + Mg \cdot d_2 = Mg\left(\frac{L}{2}sen\theta + Lsen\theta\right) = \frac{3}{2}MgLsen\theta$$

Se consideriamo oscillazioni di piccola ampiezza (0°≤θ°≤10°) ed esprimiamo l'ampiezza dell'angolo θ in radianti, possiamo approssimare senθ con θ per cui l'espressione del momento diventa

$$\tau = M_O = \frac{3}{2}MgL\theta \qquad (2)$$

Ricordiamo ora che l'accelerazione angolare del sistema è la derivata seconda rispetto al tempo dell'angolo θ e dunque dalla la legge (1) ricaviamo:

$$\tau = \left(I_{bO} + I_{dO}\right)\cdot \alpha = \left(\frac{1}{3}ML^2 + \frac{129}{128}ML^2\right)\cdot \ddot{\theta} = \frac{515}{384}ML^2\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Possiamo ora osservare che fissando come positivo il verso antiorario per l'angolo θ, l'accelerazione è negativa quando l'angolo θ >0 ed è positiva quando θ<0, quindi i valori algebrici sono discordi. Questo fatto implica che le due forze tendono ad impedire che il baricentro del sistema si allontani dall'asse di rotazione e quindi i pesi fungono da "richiamo" verso la verticale. Per questo motivo, nel confrontare le due espressioni algebriche del momento si deve uguagliare l'espressione (3) all'opposto dell'espressione (2). Quindi l'equazione che permette di determinare la legge angolare che descrive il moto è:

$$\frac{515}{384}ML^2\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}MgL\theta .$$

Possiamo semplificare l'equazione ottenuta scrivendola nella forma seguente:

$$\ddot{\theta} = -\frac{576}{515}\cdot\frac{g}{L}\theta \qquad (4)$$

La (4) è un'equazione differenziale del secondo ordine ed è dello stesso tipo dell'equazione relativa al moto armonico semplice. La si riconosce ancora meglio ponendo

$$\omega^2 = \frac{576g}{515L} \qquad \text{in quanto diventa}$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta \qquad (4.1)$$

Deduciamo dunque che la legge che descriverà le oscillazioni del pendolo (ripetiamo per piccole oscillazioni) è proprio quella del moto armonico. La pulsazione è

$$\omega = \sqrt{\frac{576g}{515L}} ,$$

il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{515L}{576g}} \qquad (5)$$

Sostituendo i valori noti per la lunghezza e l'accelerazione di gravità si ricava

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{515L}{576g}} = 2\pi\sqrt{\frac{515 \cdot 0{,}28m}{576 \cdot 9{,}81ms^{-2}}} = 1{,}003s$$

c) Come si vede il periodo del pendolo supera il secondo di tre millesimi. Se un orologio funziona con il dispositivo indicato ed è impostato in modo che segni un secondo ogni oscillazione compiuta dal sistema, allora nell'arco delle 24 ore della giornata accumulerà un ritardo. Infatti, quando l'orologio segna che è trascorso un secondo, in realtà è trascorso un tempo superiore di tre millesimi (di secondo) e poiché l'orologio segnalerà che saranno trascorse 24 ore allorquando avrà compiuto un numero di oscillazioni pari a $24 \cdot 60 \cdot 60s = 86400$, tanti quanti sono i secondi contenuti nelle 24 ore, è evidente che in quel tempo avrà accumulato un ritardo pari a

$$Ritardo = 86400(oscillazioni) \cdot \frac{3}{1000}\frac{s}{(oscillazione)} = 259{,}2s = 4^{min}19{,}2^{s}$$