Centro di massa di un disco omogeneo con foro circolare

Problema

Determinare il centro di massa di un disco omogeneo di massa M e raggio R al cui interno sia stato praticato un foro circolare di raggio r<R e centro diverso dal centro del disco principale.

Soluzione

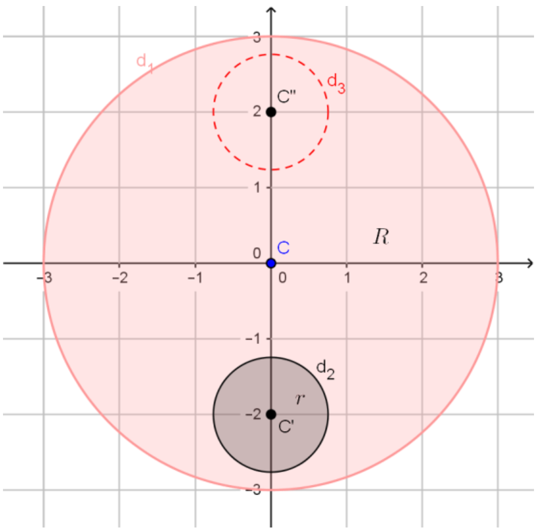
Strategia risolutiva

Un disco circolare omogeneo, qualunque sia la sua massa, ha il centro di massa coincidente con il suo centro geometrico C. Se ad un disco come quello indicato sopra si asporta una parte circolare di raggio r<R concentrica con il disco principale evidentemente per simmetria il centro di massa del nuovo corpo, ancora omogeneo, coinciderà sempre con il centro C; se invece la parte asportata è in posizione eccentrica rispetto a C il centro di massa del nuovo corpo non coinciderà con C ma, detto C' il centro del cerchio di massa asportata, certamente il centro di massa si troverà, per motivi di simmetria, sulla retta congiungente i centri C e C'.

Per determinare la posizione del centro di massa facciamo riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy, con O coincidente con il centro C del disco (d) e asse y coincidente con la retta congiungente i centri C, C'.

Supponiamo di asportare dal disco d un disco (d_3) congruente al disco mancante (d_2) e simmetrico di questo rispetto al centro C.

Elaborazioni



Osserviamo la figura riportata a margine nella quale:

il disco d di centro C(0;0) ha raggio R e presenta il foro di centro C' e raggio r<R. Poniamo C' ($0;y_{C'}$). Il foro sarà indicato come disco d_2.

Il disco d_3, di centro C'' ($0;y_{C''}$) è il simmetrico del disco d_2 rispetto al punto C; dunque $y_{C''}=- y_{C'}$.

1) Il disco d_1 ottenuto dal disco d sottraendo il disco d_3, è omogeneo e simmetrico rispetto all'asse delle ascisse e all'asse delle ordinate. Il suo centro di massa coincide dunque con il punto C e in esso possiamo pensare concentrata la massa di questo disco con due fori. Indichiamo tale massa con M_1.
2) Il disco d_3, ha centro di massa coincidente con il suo centro C" e in tale punto possiamo pensare concentrata la massa del disco stesso. Indichiamo con M_3 la massa del disco d_3.
3) La massa del disco d con il solo foro rappresentato dal cerchio del disco d_2 ha massa $M= M_1 + M_3$.

Ricerca della posizione del centro di massa del sistema delle due masse M_1, M_3 (quindi del disco d)

Indichiamo con σ la densità superficiale di massa del disco d, e quindi anche dei dischi $d_{1,}$ d_3.

Valore della massa M_3: $M_3 = \sigma\pi r^2$

Valore della massa M_1: $M_1 = \sigma\pi R^2 - 2\sigma\pi r^2 = \sigma\pi\left(R^2 - 2r^2\right)$

Il centro di massa del sistema formato dalle due masse M_1, M_3 , poiché queste ultime sono considerate come puntiformi e concentrate rispettivamente in C(0;0) e C”(0;$y_{C''}$), sarà un punto del segmento avente per estremi C e C”; l’ascissa è dunque nulla e l’ordinata si ottiene dalla formula delle coordinate del centro di massa per un sistema di due masse puntiformi m_1, m_2 posizionate rispettivamente in (x_1;y_1), (x_2;y_2) , che ricordiamo sono

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2};\ y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

Pertanto risulta

$$y_{CM} = \frac{M_1 y_1 + M_3 y_{C''}}{M_1 + M_3} = \frac{M_1 \cdot 0 + M_3 y_{C''}}{M_1 + M_3} = \frac{M_3 y_{C''}}{M_1 + M_3} = \frac{\sigma\pi r^2 \cdot y_{C''}}{\sigma\pi\left(R^2 - 2r^2\right) + \sigma\pi r^2} = \frac{r^2 \cdot y_{C''}}{R^2 - r^2}$$

A questo punto, nota la posizione del centro del foro $C'\left(0; y_{C'}\right)$,essendo $y_{C''} = -y_{C'}$, si conclude che il centro di massa del disco d è

$$CM\left(x = 0; y = -\frac{r^2 \cdot y_{C'}}{R^2 - r^2}\right)$$