# Sorpasso si, sorpasso no

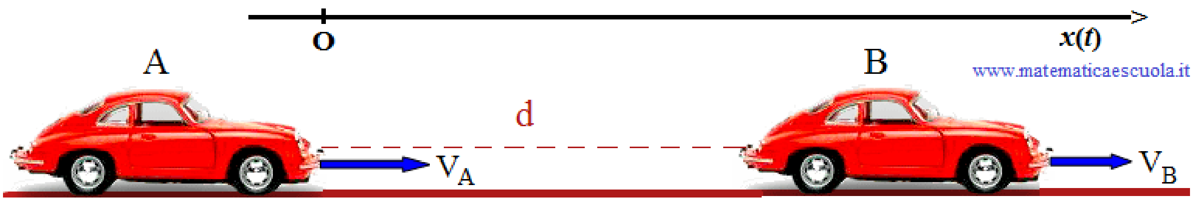
## (cinematica e disequazioni di secondo grado)

**Problema**

Due auto A, B procedono su una strada rettilinea piana nello stesso verso con velocità $V_A$, $V_B$, con $V_A > V_B$ e l'auto A che segue B a distanza D. Il conducente dell'auto A decide di non sorpassare ed aziona i freni decelerando uniformemente con decelerazione $-a$.

1) Dimostrare che il conducente A riesce a non sorpassare l'auto B se e solo se risulta $V_A - V_B < \sqrt{2ad}$ .
2) Nell'ipotesi che la condizione $V_A - V_B < \sqrt{2ad}$ non sia verificata descrivere il moto relativo tra le due auto per tutto l'intervallo di tempo che dura la decelerazione dell'auto A.

**Soluzione**




Scelta del sistema di riferimento per la descrizione del moto

Il moto delle due auto si svolge idealmente lungo una traiettoria rettilinea (l'asse della strada), per cui per la descrizione fissiamo un sistema di riferimento spazio-temporale costituito da un asse reale per le ascisse parallelo alla strada, orientato nel verso del moto delle due auto, con l'origine coincidente con l'estremo anteriore dell'auto A. Assumiamo per la misura del tempo l'orologio che nell'istante in cui l'estremo anteriore dell'auto A è nell'origine dell'asse delle ascisse segni zero.

Leggi orarie dei moti delle due auto

**Auto A** - Il moto dell'auto è uniformemente decelerato per tutto il periodo del moto. Indicando con $V_{0A}$ il modulo della velocità posseduta nell'istante t=0s, la legge oraria è

$$x_A(t) = -\frac{1}{2}at^2 + V_{0A}t , \qquad (1.A)$$

mentre la legge oraria della velocità è

$$V_A(t) = -at + V_{0A} \qquad (2.A)$$

**Auto B** - Il moto dell'auto è rettilineo uniforme, infatti conserva la velocità posseduta nell'istante t=0s. Osservando che la posizione iniziale dell'estremità posteriore dell'auto nell'istante iniziale è $x_{0B} = d$ la legge oraria è

$$x_B(t) = V_{0B}t + d \qquad (1.B)$$

nella quale $V_{0B}$ rappresenta il modulo della velocità costante dell'auto, indicata nel testo con $V_B$.

## Confronto delle posizioni delle due auto

L'auto A per la durata del suo moto rallenta continuamente, quindi ad un certo istante si fermerà. Affinché non avvenga il sorpasso[1] dell'auto A nei confronti dell'auto B l'ascissa di A deve essere sempre minore dell'ascissa di B, quindi per ogni t>0s deve essere soddisfatta la disequazione

$x_A(t) < x_B(t)$, cioè $-\frac{1}{2}at^2 + V_{0A}t < V_{0B}t + d$, che ridotta alla forma normale diventa

$$at^2 + 2(V_{0B} - V_{0A})t + 2d > 0 \qquad (3)$$

L'insieme delle soluzioni della (3) dipende dal discriminante del trinomio al primo membro; in particolare la disequazione è soddisfatta per ogni *t* reale se e solo se il discriminante è negativo, quindi se risulta

$$\frac{\Delta}{4} = (V_{0B} - V_{0A})^2 - 2ad < 0 \qquad (4)$$

A questo punto è bene notare che la decisione presa dal conducente dell'auto A è logica solo se la sua velocità iniziale è maggiore della velocità a cui procede l'auto B, dunque se $V_{0A} > V_{0B}$ [2]. Con tale ipotesi la disuguaglianza (4) diventa equivalente alla seguente

$$V_{0A} - V_{0B} < \sqrt{2ad} \qquad (4.1)$$

Pertanto **la (4.1) è la condizione che deve essere verificata dalle velocità iniziali delle due auto affinché A non sorpassi B**. Quindi il moto dell'auto A si svilupperà interamente fino al blocco dell'auto con questa che rimane sempre dietro l'auto B.

## Cosa succede se non è soddisfatta la condizione (4.1)?

Si devono considerare due casi:

1) qualora risulti $V_{0A} - V_{0B} = \sqrt{2ad}$
2) qualora risulti $V_{0A} - V_{0B} > \sqrt{2ad}$.

---

(1) Per affrontare nei dettagli lo studio del moto relativo delle due auto si dovrebbe conoscere anche la lunghezza dei due autoveicoli. Nella risoluzione del problema, per semplicità, si suppone di assimilare le due auto a due oggetti materiali puntiformi.
(2) Come del resto è indicato nel testo del problema.

Precisiamo cosa avviene in ciascun caso.

1) Osserviamo che nell'ipotesi $V_{0A}-V_{0B}=\sqrt{2ad}$ il discriminante della disequazione (3) si annulla e l'equazione di secondo grado associata $at^2+2\left(V_{0B}-V_{0A}\right)t+2d=0$ ammette una radice doppia il cui valore è $t=\dfrac{V_{0A}-V_{0B}}{a}$. In detto istante le due auto (puntiformi) hanno la stessa ascissa (auto affiancate). Possiamo calcolare la velocità dell'auto A nell'istante indicato. Dalla legge oraria della velocità ricaviamo

$$V_A\left(t=\frac{V_{0A}-V_{0B}}{a}\right)=-a\cdot\frac{V_{0A}-V_{0B}}{a}+V_{0A}=V_{0B}$$

Dunque nell'istante in cui l'auto A affianca l'auto B le velocità delle due auto sono uguali. Considerato che negli istanti successivi la velocità di A continua a diminuire si conclude che l'auto A rimarrà indietro rispetto all'auto B, finché non si fermerà. Quindi nell'ipotesi fatta $V_{0A}-V_{0B}=\sqrt{2ad}$ non ha comunque luogo il sorpasso.

2) Nel caso si risulti $V_{0A}-V_{0B}>\sqrt{2ad}$ il discriminante dell'equazione associata alla (3) è positivo e detti $t_1$, $t_2$ i valori delle due radici reali, con $t_1<t_2$ , si riconosce[(3)] che sono positivi e la disequazione (3) è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici. Limitandoci a considerare valori positivi per il tempo e considerando l'istante di arresto dell'auto A che è $t_3=\dfrac{V_{0A}}{a}$, le soluzioni della (3) sono gli istanti *t* tali che $\left(0<t<t_1\right)\vee\left(t_2<t<t_3\right)$. Durante ciascuno dei due intervalli $0<t<t_1$, $t_2<t<t_3$, l'auto A si trova dietro all'auto B; nell'intervallo $t_1<t<t_2$ l'auto A si trova davanti all'auto B. Nell'istante $t_1$ A sorpassa B ma nel successivo istante $t_2$ l'auto B sorpassa l'auto A. Nei due istanti $t_1$, $t_2$ le due auto sono affiancate.

---

(3) Basta applicare la regola di Cartesio osservando che i coefficienti dell'equazione danno luogo a due variazioni e quindi, essendo $\Delta>0$, le due radici reali sono entrambe positive.