

Campo elettrico e potenziale elettrico

Problema⁽¹⁾

Sui lati del quadrato ABCD, di lato $l=10\text{cm}$, è distribuita la carica elettrica uniformemente. Sui lati AB e BC la carica è positiva, mentre sui lati AD, CD è negativa; l'intensità complessiva della carica su ciascun lato è $q=5,0\cdot 10^{-6}\text{C}$. La struttura elettrica è immersa nel vuoto.

Determinare il valore del campo elettrico e del potenziale elettrico generati dalla distribuzione lineare di carica nel punto O, centro del quadrato, e nel punto E simmetrico di O rispetto al lato AD.

Elaborazioni

Prima Parte: campo elettrico generato nel centro O del quadrato

Facciamo riferimento alla Figura 1 nella quale compaiono gli elementi di seguito descritti.

- 1) A,B,C,D sono i vertici del quadrato.
- 2) AB, BC sono i lati del quadrato sui quali è distribuita la carica positiva e CD, AD i due lati caricati con carica negativa. In prossimità dei lati AB, BC sono riportate le etichette (+), per indicare la presenza di carica positiva, analogamente, in prossimità dei lati CD, AD sono riportate le etichette (-) per indicare la presenza di carica negativa.
- 3) È stato fissato il sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy con l'origine O nel centro del quadrato ABCD.
- 4) È stato scelto un punto P del lato DC del quadrato appartenente al primo quadrante nel quale pensiamo centrato un elemento di carica di intensità dq e sono individuati i simmetrici di P rispetto agli assi cartesiani (P'_1 , rispetto all'asse y , P' , rispetto all'origine, P'_2 , rispetto all'asse x).
- 5) Sono indicati il vettore campo elettrico $d\mathbf{E}_1$, generato dalla coppia di elementi di carica elementare centrati nei punti P e P' e il vettore campo elettrico $d\mathbf{E}_2$, generato dalla coppia di elementi di carica elementare centrati nei punti P'_1 , P'_2 .
- 6) L'angolo di ampiezza α formato dal vettore $d\mathbf{E}_1$ con il semiasse positivo delle ascisse.

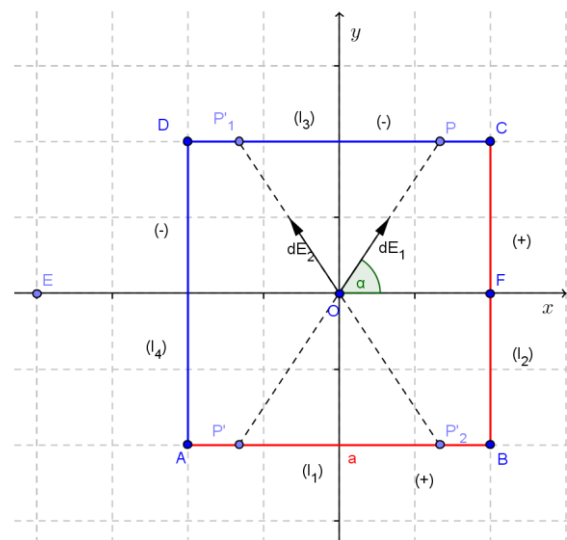


Figura 1

- Campo elettrico generato in O dalle cariche presenti sui lati AB, CD

$$\dots E_{13} = \int_{\alpha=\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dE_{12} = \int_{\alpha=\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{8k\lambda}{l} \text{sen}\alpha d\alpha = \frac{4\sqrt{2}k\lambda}{l}.$$

⁽¹⁾ Testo assegnato nella prova d'esame del 23/01/2014 nel corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, Politecnico di Bari

- **Campo elettrico generato in O dalle cariche presenti sui lati BC, AD**

Lo studio va eseguito con un procedimento analogo a quello descritto per il campo elettrico generato dalle cariche presenti sui due lati AB, CD. In Figura 2 è riportata la figura di riferimento. È stato scelto un punto N nel primo quadrante sul segmento di estremi $F(l/2;0)$, $C(l/2; l/2)$ e individuati i punti N' , N'_1 , N'_2 , rispettivamente simmetrici di N rispetto all'asse x, all'origine O e all'asse y. Nei punti P, N' , N'_1 , N'_2 pensiamo concentrate le cariche elementari puntiformi che generano il campo elementare in O; questo campo lo pensiamo ottenuto dalla somma dei due campi elementari dE'_1 , generato dalle cariche in N e N'_1 , e dE'_2 , generato dalle cariche elementari centrate nei punti N' , N'_2 .

$$\dots E_{24} = \int_{\beta=\pi}^{\frac{3\pi}{4}} dE'_{12} = \dots = \frac{8k\lambda}{l} \cdot \int_{\beta=\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \beta d\beta = \frac{4\sqrt{2}k\lambda}{l}$$

- **Campo elettrico globale in O**

$$|\overline{E}_O| = \frac{4\sqrt{2}k\lambda}{l} \cdot \sqrt{2} \cdot 3,60 \cdot 10^7 \frac{N}{C}$$

*** **

Seconda Parte: campo elettrico generato nel punto esterno E

- **Campo elettrico in E generato dalle cariche presenti sui lati AB, CD**

Espressione vettoriale del campo generato in E

$$\overline{E}_{13} = \frac{4k\lambda}{l} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{j}$$

*** **

Osservazione

Per il campo creato in E dalle cariche presenti sui lati BC e AD si devono eseguire calcoli separati per i due lati perché il punto E si trova in posizione asimmetrica rispetto agli stessi.

*** **

- ...

- **Campo elettrico totale in E ...**

Il campo elettrico generato in E da tutta la carica presente sul bordo del quadrato ABCD è dato dalla somma dei campi elettrici \overline{E}_{13} , \overline{E}_2 , \overline{E}_4 ; quindi

$$\vec{E}_{tot} = \frac{2k\lambda}{l} \left[\left(-\frac{2}{3\sqrt{10}} + \sqrt{2} \right) \vec{i} + \left(\frac{6}{\sqrt{10}} - \sqrt{2} \right) \vec{j} \right]$$

...

*** **

Terza Parte: Calcolo del potenziale nei punti O ed E

Premessa

Per lo studio del potenziale generato dalla distribuzione di carica si fa riferimento alla funzione potenziale generato da una carica puntiforme e si applica il principio di sovrapposizione dei campi elettrici, valido anche agli effetti della creazione della funzione potenziale elettrico.

Si ricordi che la funzione potenziale di un campo elettrostatico è definita a meno di una costante additiva.

Una carica puntiforme Q genera nello spazio vuoto in un punto P a distanza r dalla carica Q un potenziale elettrico la cui espressione è

$$V = k \frac{Q}{r}$$

Nell'espressione indicata del potenziale si è assunto che il valore del potenziale sia nullo nei punti infinitamente lontani dalla carica ($r \rightarrow +\infty$).

Ricordiamo che nell'espressione del potenziale il valore della carica Q va preso con il segno della stessa.

Potenziale nel punto O

Vogliamo provare che la distribuzione di carica genera nel centro O del quadrato un potenziale che in virtù della scelta della forma (1), applicando il principio di sovrapposizione, è nullo.

...

Potenziale nel punto E

- Potenziale creato dalle cariche presenti sui lati AB, CD

Facciamo riferimento alla Figura 7.

- ...Potenziale in E creato dalla carica presente sul lato BC

Facciamo riferimento alla Figura 8

$$\dots V_2 = \int_{\alpha=0}^{\arctg\left(\frac{1}{3}\right)} dV = \int_{\alpha=0}^{\arctg\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{2k\lambda}{\cos \alpha} d\alpha =$$

Valore del potenziale

$$V_2 = 2k\lambda \int_{\alpha=0}^{\arctg\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{1}{\cos \alpha} d\alpha = 2k\lambda \ln \left(\frac{\sqrt{10}+4}{\sqrt{10}+2} \right)$$

Osserviamo che il valore del potenziale è positivo.

- **Potenziale in E creato dalla carica presente sul lato AD**

Facciamo riferimento alla Figura 9

...

$$V_4 = 2k\lambda^- \cdot \ln(1 + \sqrt{2})$$

Potenziale totale in E

Il potenziale totale creato da tutta la distribuzione di carica sui lati del quadrato ABCD nel punto E vale

$$V(E) = V_2 + V_4 = 2k\lambda^+ \left[\ln \left(\frac{\sqrt{10}+4}{\sqrt{10}+2} \right) - \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$$