Dinamica rotazionale

Problema

Nel sistema meccanico descritto in **Figura 1** le due masse m_1=1,5Kg, m_2=2Kg sono legate da una funicella inestensibile e di massa trascurabile che passa attraverso la gola di una carrucola avente momento d'inerzia I=0,1Kgm^2 rispetto al suo centro C, intorno al quale può ruotare senza attrito. La carrucola ha raggio R=10cm. La funicella aderisce perfettamente alla carrucola e non vi sono slittamenti. La massa m_1 può scivolare sul piano orizzontale su cui poggia senza attrito. Il sistema è inizialmente bloccato con la massa m_2 ad altezza di 50cm dal pavimento del laboratorio. Ad un certo istante si lascia libero il sistema di muoversi.

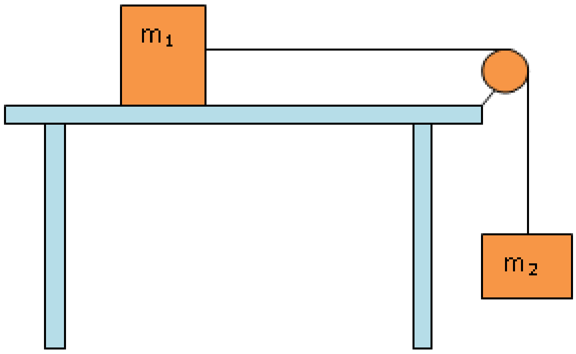

Figura 1

1) Determinare l'accelerazione con cui si muove il sistema meccanico.
2) Determinare il tempo necessario affinché la massa m_2 arrivi sul pavimento e la velocità con cui vi impatta.
3) Determinare il modulo della velocità angolare della carrucola nell'istante di impatto della massa m_2 con il pavimento.

Elaborazioni

Strategia risolutiva

- Il sistema meccanico, una volta lasciata libera la massa m_2, si metterà in moto per effetto del peso di m_2 perché la massa m_1 può scivolare senza attrito sul piano del tavolo e la carrucola può ruotare senza attrito intorno ad un suo asse baricentrale, quindi no vi sono forze resistive che possano ostacolare il moto.
- La funicella che collega le due masse è sottoposta a due tensioni:
  a) lungo il tratto compreso tra la carrucola e la massa m_1 è presente la tensione $\mathbf{T_1}$ responsabile del moto di m_1;
  b) lungo il tratto compreso tra la carrucola e la massa m_2 è sottoposta alla tensione T_2 che rallenta il moto di m_2.

  Osserviamo che le intensità delle due tensioni T_1, T_2 sono diverse perché la funicella mette in rotazione la carrucola, dotata di massa.

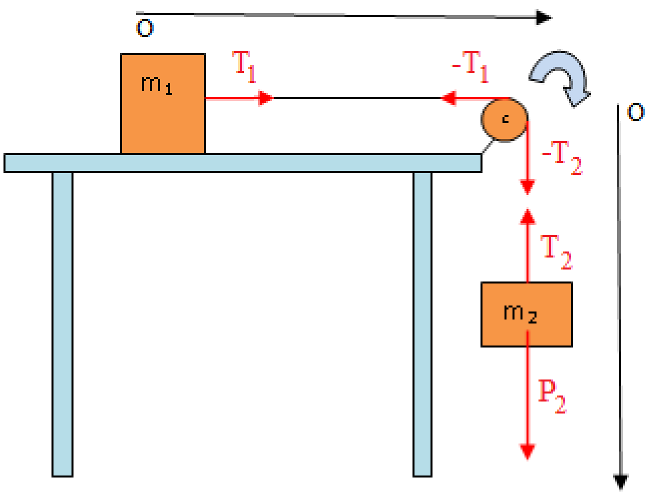

Figura 2

- Le due masse m_1, m_2 trasleranno rispettivamente con accelerazioni $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ aventi lo stesso modulo: $\left|\overrightarrow{a_1}\right| = \left|\overrightarrow{a_2}\right| = a$ e la carrucola ruoterà con accelerazione angolare α. Per quest'ultima il momento complessivo τ delle due tensioni ha modulo $I\alpha$, essendo I il momento d'inerzia della carrucola rispetto al suo asse baricentrale perpendicolare al piano ideale della carrucola. Il valore del momento d'inerzia è fornito nel testo.

  Osserviamo che le due tensioni esercitano sulla carrucola momenti che hanno verso opposto: un osservatore che guardi la **Figura2**, valuterà il momento esercitato dalla tensione $-\overrightarrow{T_1}$ come positivo e quello esercitato da $-\overrightarrow{T_2}$ come negativo; di ciò si deve tener conto nell'impostazione delle leggi per il moto.

- Infine, ogni punto della gola della carrucola ruota con accelerazione tangenziale $\overrightarrow{a_t}$ avente lo stesso modulo delle due accelerazioni con cui si muovono le masse m_1, m_2 e sussiste la relazione $a_t = R\alpha$.

Per impostare le leggi fisiche è necessario adottare dei sistemi di riferimento. Poiché il moto delle due masse è unidimensionale adottiamo un asse orizzontale parallelo e concorde al moto di m_1 e un asse verticale orientato verso il basso per la descrizione del moto della massa m_2.

*** ***

1) La forza $\overrightarrow{T_1}$ è l'unica responsabile del moto di m_1, dunque si ha $\overrightarrow{T_1} = m_1\overrightarrow{a_1}$.

   Sulla massa m_2 agiscono due forze: il suo peso $\overrightarrow{P_2} = m_2\overrightarrow{g}$ e la tensione $\overrightarrow{T_2}$; pertanto si ha $\overrightarrow{T_2} + m_2\overrightarrow{g} = m_2\overrightarrow{a_2}$.

   Le espressioni scalari delle due equazioni del moto delle due masse rispetto ai due assi orientati precisati sono

$$T_1 = m_1 a\,; \qquad (1)$$

$$-T_2 + m_2 g = m_2 a \qquad (2)$$

   Scriviamo ora l'equazione dei momenti delle due tensioni applicati alla carrucola:

$$T_1 R - T_2 R = -I\alpha \qquad (3)$$

   Nella relazione scritta abbiamo indicato con α il modulo dell'accelerazione angolare con cui ruota la carrucola e tenuto conto che la rotazione avviene nel verso orario, che per convenzione è negativo.

   Ricordato che l'accelerazione tangenziale dei punti della gola della carrucola è $a_t = R\alpha$, con $a_t = a$, nella (3) si può sostituire α con R/a .

Si deve risolvere il sistema formato dalle equazioni (1), (2), (3) nelle incognite T_1, T_2, a. Si ha:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a \\ -T_2 + m_2 g = m_2 a \\ T_1 R - T_2 R = -I \cdot \dfrac{a}{R} \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} T_1 = m_1 a \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \\ T_1 \cdot m_1 a - T_2 \cdot (m_2 g - m_2 a) = -I \cdot \dfrac{a}{R} \end{cases} \rightarrow a = \frac{R^2 m_2 g}{R^2 (m_1 + m_2) + I}$$

Sostituendo i valori noti alle relative grandezze si ricava:

$$a = \frac{(0{,}1m)^2\, 2Kg \cdot 9{,}81ms^{-2}}{(0{,}1m)^2 (3{,}5Kg) + 0{,}1Kg \cdot m^2} \approx 1{,}45 \frac{m}{s^2}$$

2) Tempo impiegato dalla massa m_2 per toccare il pavimento e velocità di impatto

Il moto della massa è uniformemente accelerato con accelerazione a=1,45ms^2 e poiché deve scendere di h=0,5m il tempo necessario sarà:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}5m}{1{,}45ms^{-2}}} \approx 0{,}83s$$

La velocità di impatto della massa m_2 con il pavimento si ottiene dalla legge V=at.

$$V_f = a \cdot \Delta t = 1{,}45 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}83s \approx 1{,}20 \frac{m}{s}$$

3) Calcolo della velocità angolare di rotazione della carrucola

La legge oraria della velocità angolare ω, considerato che nell'istante iniziale t=0s la carrucola è ferma, è

$\omega = \alpha \cdot t$, con $0 \le t \le 0{,}83s$.

Sappiamo che

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1{,}45ms^{-2}}{0{,}1m} = 14{,}5 \frac{rad}{s^2}$$

e dunque, con t=0,83s, otteniamo il valore finale della velocità angolare:

$$\omega_{fin.} = 14{,}5 \frac{rad}{s^2} \cdot 0{,}83s \approx 12{,}0 \frac{rad}{s}$$