Dinamica rotazionale

Urto e rotazione con momento frenante

Problema[1]

Un'asta rigida, di massa *m = 1,5 Kg* e lunga *ℓ = 60 cm*, può ruotare nel piano verticale intorno al suo centro, sentendo un momento di attrito costante di *0,07 Nm*. Mentre è ferma in posizione orizzontale, un suo estremo è colpito perpendicolarmente da una massa *m = 55 g* avente velocità *v = 10 m/s* (in caduta lungo la verticale). La massa *m* resta attaccata all'asta. Calcolare il momento d'inerzia del sistema massa-asta, la velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto e valutare se l'asta riesce a compiere un giro completo.

Soluzione

Strategia risolutiva

Primo quesito

Il momento d'inerzia del sistema massa-asta rispetto al centro dell'asta è uguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto allo stesso punto dell'asta e della massa che cade sul suo estremo; nel calcolo si supporrà puntiforme la massa che cade.

Secondo quesito

Nell'urto si conserva il momento angolare del sistema asticella+massa m. Indicato con O il centro dell'asticella intorno a cui il sistema può ruotare, si determina il momento angolare prima dell'urto, quello subito dopo l'urto e si impone che siano uguali; l'uguaglianza ottenuta permette di ricavare il valore iniziale della velocità angolare ω_i.

Terzo quesito

Si osservi che il momento frenate τ nella rotazione dissipa energia ed essendo τ costante l'energia dissipata nella rotazione del sistema di un angolo $\Delta\theta$ è $\tau\Delta\theta$. L'asticella ruoterà fino a descrivere l'angolo $\Delta\theta$ in corrispondenza del quale si sarà esaurita l'energia cinetica iniziale del sistema. Facciamo notare che l'**urto** tra la massa m_2 e l'asticella è **completamente anelastico**, quindi nell'impatto va persa una parte dell'energia meccanica. Occorre dunque calcolare il valore dell'energia meccanica disponibile all'inizio della rotazione e uguagliarlo al valore assoluto del lavoro compiuto dalla forza di attrito per determinare l'ampiezza dell'angolo $\Delta\theta$ che sarà descritto nella rotazione dal sistema prima di arrestarsi. Ciò fatto si potrà stabilire se l'asticella riuscirà ad effettuare almeno un giro completo.

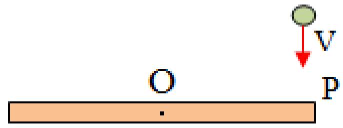
Elaborazioni

Nelle elaborazioni indichiamo con m_1 ed m_2 rispettivamente le masse dell'asticella e della massa che cade.

Sia P l'estremo dell'asticella sul quale cade la massa m_2. Il momento angolare di m_2 rispetto al centro di rotazione O del sistema subito prima dell'urto ha modulo

[1] Prova d'esame del 02-02-2010, CTF Bari

$$L = \left|\vec{L}\right| = \left|\overrightarrow{OP} \cdot m_2 \vec{V}\right| = \frac{l}{2} \cdot m_2 V$$



Il momento angolare del sistema asticella+massa m_2 subito dopo l'urto è uguale al prodotto del momento d'inerzia I calcolato rispetto al punto O con la velocità angolare con cui inizia a ruotare il sistema: $I\omega_i$. Deve risultare

$$\frac{l}{2} \cdot m_2 V = I\omega_i \qquad (1)$$

Ricordato

1) che il momento d'inerzia di un'asticella omogenea avente massa m_1 e lunghezza l calcolato rispetto ad un asse baricentrale perpendicolare al piano in cui giace l'asticella è $I_1 = \frac{1}{12} m_1 l^2$;
2) che il momento d'inerzia di una massa puntiforme m_2 rispetto ad un punto O da cui disti r è $\mathrm{I}_2 = m_2 r^2$,

deduciamo che il momento d'inerzia del sistema asticella+massa m_2 rispetto al centro O dell'asticella è

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{1,5}{12} + \frac{0,055}{4}\right) Kg\,(0,6m)^2 \approx 5,0 \cdot 10^{-2}\, Kg \cdot m^2 \qquad (2)$$

Calcolo della velocità angolare iniziale del sistema meccanico

Sostituendo nell'uguaglianza (1) il valore del momento d'inerzia espresso dalla (2) si ha

$$\omega_i = \frac{l m_2 V}{2I} = \frac{0,6m \cdot 0,055Kg \cdot 10ms^{-1}}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2}\, Kg \cdot m^2} = 3,3 \frac{Rad}{s}$$

Angolo descritto dal sistema nella rotazione

L'energia cinetica disponibile all'inizio della rotazione vale

$$E_c^i = \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

Energia dissipata dal momento frenante sul sistema nella descrizione dell'angolo $\Delta\theta$: $\tau \cdot \Delta\theta$.

Uguagliando i valori si ha

$$\frac{1}{2} I \omega_i^2 = \tau \cdot \Delta\theta, \text{ da cui } \Delta\theta = \frac{I\omega_i^2}{2\tau} = \frac{5,0 \cdot 10^{-2}\, Kgm^2 \cdot 3,3^2\, Rad^2 \cdot s^{-2}}{2 \cdot 0,07 N \cdot m} = 3,89 Rad$$

Conclusione

Il sistema rotante si fermerà dopo aver descritto l'angolo di 3,89Rad, in gradi sessagesimali l'ampiezza è circa 222°51′, quindi non ce la farà a descrivere un giro completo.