Energia immagazzinata in un condensatore piano

Forza di attrazione tra le armature

Problema

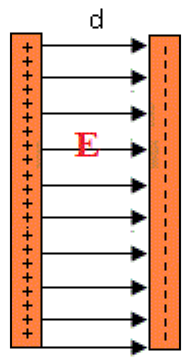
Un condensatore piano ideale avente armature piane di area ***A*** e distanti ***d*** è caricato con carica ***Q***=1,2nC sull'armatura positiva, quindi viene isolato. Sapendo che l'energia elettrostatica immagazzinata vale ***U***=$8{,}0\cdot 10^{-8}$J e che l'intensità del campo elettrico presente tra le sue armature vale 6000V/m, determinare l'area A, la distanza d tra le armature e l'intensità della forza che si esercita tra le armature.

Elaborazioni

1) Il campo elettrico $\vec{E}$ tra le armature di un condensatore piano, lontano dai bordi delle armature, è costante ed il suo modulo è direttamente proporzionale alla densità superficiale di carica σ presente sull'armatura positiva. Risulta $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$; conoscendo l'intensità del campo elettrico si può trovare la densità di carica.

$$\sigma = E\cdot\varepsilon_0 = 6000\frac{V}{m}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2} = 53{,}1\cdot 10^{-9}\frac{C}{m^2}$$

Condensatore ad armature piane



La conoscenza della densità di carica e della carica Q permette di determinare l'area di ciascuna armatura.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow A = \frac{Q}{\sigma} = \frac{1{,}2\cdot 10^{-9}C}{53{,}1\cdot 10^{-9}C\cdot m^{-2}} \approx 0{,}0226m^2 = 226cm^2$$

2) L'energia immagazzinata in un condensatore può essere espressa come segue

$U = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{Q^2}{C}$ e poiché sono noti i valori di U e Q si può trovare la capacità del condensatore.

$$C = \frac{Q^2}{2U} = \frac{(1{,}2)^2\cdot 10^{-18}C^2}{8{,}0\cdot 10^{-8}J} = 18pF$$

3) La capacità di un condensatore piano le cui armature abbiano area A e distanza d, se tra le armature vi è il vuoto, è $C = \varepsilon_0\dfrac{A}{d}$, essendo ε_0 la costante dielettrica del vuoto; dalla precedente relazione si determina al distanza d tra le armature del condensatore.

$$d = \varepsilon_0\frac{A}{C} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}\cdot\frac{2{,}26\cdot 10^{-2}m^2}{18pF} = 1{,}111\cdot 10^{-2}m \approx 11{,}1mm$$

4) Calcolo della forza esercitata tra le armature per effetto del campo elettrico.

Osserviamo che esprimendo l'energia immagazzinata nel condensatore utilizzando la carica Q, l'area di ciascuna armatura e la distanza x tra le armature

$$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}x$$

si evince che a parità di carica, allontanando le due armature aumenta l'energia immagazzinata nel condensatore; ebbene, per allontanare le armature un soggetto esterno deve esercitare una forza F che abbia almeno intensità pari a quella esercitata dal campo elettrico che tiene unite le due armature ed il lavoro eseguito dal soggetto esterno lo si ritrova come aumento di energia immagazzinata nel condensatore. Detta $\vec{F}$ la forza con cui si attraggono le armature, e supponendo che il soggetto esterno applichi la forza $-\vec{F}$ per divaricare le stesse portandole dalla distanza x alla distanza $x+\Delta x$, il lavoro eseguito dall'agente esterno è $L = F\cdot\Delta x$; il risultato è uguale alla variazione ΔU di energia elettrica immagazzinata nel condensatore. Dunque

$$F\cdot\Delta x = U_{fin.} - U_{in.} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}(x+\Delta x) - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\Delta x$$, da cui

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$ sostituendo i valori noti alle grandezze otteniamo

$$F = \frac{1,44\cdot 10^{-18}C^2}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}\cdot 2,26\cdot 10^{-2}m^2} = 3,60\cdot 10^{-6}N$$