Il moto di un camion in una galleria

Utilizzo delle derivate e del calcolo integrale

Problema

Un camion che viaggia su un'autostrada entra in una galleria all'istante t=0s e da quel momento procede con accelerazione *a* avente legge oraria $a = 0,5t - 4$, con t espresso in secondi. E' noto che dopo 6s la velocità del mezzo è di 10m/s e che la durata dell'attraversamento della galleria è 12s.

Nell'ipotesi che il tratto della galleria sia rettilineo, risolvere i seguenti quesiti

1) Determinare il valore della velocità con cui il mezzo entra nella galleria e la legge oraria della velocità nella percorrenza del tunnel.
2) Rappresentare in un opportuno riferimento cartesiano la legge oraria delle velocità.
3) Descrivere le caratteristiche del moto precisando in quali intervalli è accelerato e in quali è decelerato. Determinare il valore minimo raggiunto dalla velocità del mezzo e quello all'uscita dal tunnel.
4) Trovare la legge oraria della posizione istantanea del mezzo e la lunghezza del tunnel. Determinare il valore della velocità media con cui il mezzo ha attraversato il tunnel.
5) Rappresentare in un opportuno riferimento cartesiano la legge oraria della posizione.

Elaborazioni

Premessa

Per la descrizione del moto assumiamo come riferimento spazio-temporale un asse rettilineo orientato nel verso del moto, con origine nel punto iniziale della galleria, unità di misura il metro; per la misura degli intervalli di tempo, coerentemente con le indicazioni contenute nel testo del problema, assumiamo come istante iniziale per il moto t=0s, appunto quello in cui il mezzo entra in galleria.

1) Indichiamo con v(t) la componente scalare della velocità istantanea del mezzo durante il moto nel riferimento adottato. E' noto che la derivata della velocità rispetto al tempo è l'accelerazione. La legge oraria $a = 0,5t - 4$ dell'accelerazione fornita e v(t) sono perciò legate dalla relazione

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t) \qquad (1)$$

da cui,

$$dv(t) = a(t)dt \qquad (1.1)$$

Integrando i due membri della (1.1) nell'intervallo [0;t](s) si ha

$$\int_0^t dv(t) = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t \left(\frac{1}{2}t - 4\right)\mathrm{d}t \qquad (2)$$

Eseguiamo le operazioni di integrazione e indichiamo con v_0 il valore della velocità del mezzo all'ingresso in galleria.

$v(t) - v_0 = \frac{1}{4}t^2 - 4t$, da cui

$$v(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + v_0 \qquad (3)$$

Teniamo ora conto che è noto il valore della velocità del mezzo nell'istante t=6s, essendo v(t=6s)=10m/s; sostituendo nella (3) il valore 6s si può ricavare v_0. Si ha

$$v(6s) = \left(\frac{1}{4}\cdot 6^2 - 4\cdot 6 + v_0\right)\frac{m}{s} = \left(-15 + v_0\right)\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$$

quindi v_0=25m/s=90Km/h.

La legge oraria della velocità è

$v(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 25$, con 0≤t≤12s.

2) La rappresentazione grafica della legge oraria della velocità è in **Figura 1**.
3) Il moto del camion è vario, la sua velocità non varia uniformemente e non si tratta di un moto uniformemente accelerato, né di un moto uniformemente decelerato. Si riconoscono le seguenti caratteristiche:
   a. v(t)>0 in tutto l'intervallo [0;12](s). Questa proprietà si deduce dal segno del discriminante del trinomio $\frac{1}{4}t^2 - 4t + 25$; infatti risulta $\Delta = 16 - 25 = -9 < 0$ e ciò, dalla teoria delle disequazioni di secondo grado, implica che $\frac{1}{4}t^2 - 4t + 25 > 0$ per ogni t reale.

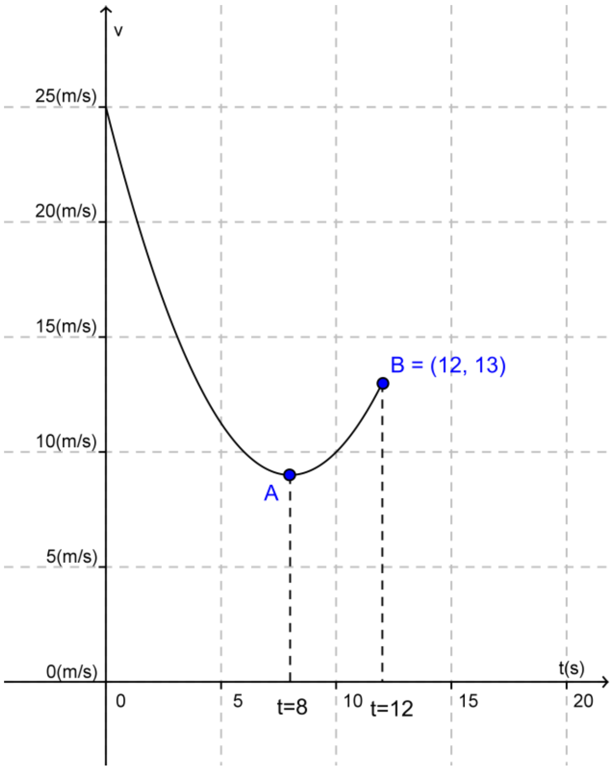

Figura 1

L'equazione cartesiana $v(t)=\frac{1}{4}t^2-4t+25$ rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, vertice nel punto A(8;9). Limitatamente all'intervallo del moto, si riconosce che nell'intervallo [0;8[(s) il modulo della velocità diminuisce, quindi si tratta di un moto decelerato; la velocità si riduce progressivamente dal valore iniziale di 25m/s al **valore minimo di 9m/s**, che viene assunto nell'istante t=8s. Nell'intervallo]8;12](s) la velocità aumenta, dunque il moto del mezzo è accelerato. **All'uscita dalla galleria il valore della velocità è**

$$v(12s)=\left(\frac{1}{4}\cdot 12^2-4\cdot 12+25\right)\frac{m}{s}=13\frac{m}{s}=46,8\frac{Km}{h}$$

4) Indichiamo come di consueto con s(t) l'ascissa della posizione del "punto materiale" in movimento, con t in secondi; dunque s(t) rappresenta la legge oraria della posizione. Sappiamo che la derivata della posizione rispetto al tempo fornisce il valore della velocità istantanea, cioè risulta

$$\frac{ds(t)}{dt}=v(t)=\frac{1}{4}t^2-4t+25 \qquad (4)$$

Dalla relazione $ds(t)=v(t)dt$, integrando i due membri si ha

$\int_0^t ds(t)=\int_0^t v(t)dt$, da cui $\int_0^t ds(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{4}t^2-4t+25\right)dt$

Indicando con s_0=0m il valore dell'ascissa iniziale del punto si ha

$$s(t)-s_0=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{3}-4\cdot\frac{t^2}{2}+25t\right]_0^t \rightarrow$$

$$s(t)=\frac{1}{12}t^3-2t^2+25t\text{, con } 0\le t\le 12(s). \qquad (5)$$

La (5) è l'espressione della legge oraria della posizione cercata.

Lunghezza del tunnel

La lunghezza l del tunnel si determina ponendo nella legge oraria della posizione t=12s, giacché è noto dal testo che la durata dell'attraversamento del tunnel è appunto 12s.

$$l=s(12)=\left(\frac{1}{12}\cdot 12^3-2\cdot 12^2+25\cdot 12\right)m=156m$$

Velocità media di attraversamento del tunnel

Il modulo della velocità media è data da rapporto tra la lunghezza del tratto percorso e la durata del moto: $v_m = \frac{l}{\Delta t} = \frac{156m}{12s} = 13\frac{m}{s} = 46,8\frac{Km}{h}$

Posizioni particolari del mezzo

Nell'istante t=6s $\rightarrow$ $s(6) = \left(\frac{1}{12}\cdot 6^3 - 2\cdot 6^2 + 25\cdot 6\right)m = 96m$;

nell'istante t=8s $\rightarrow$ $s(8) \simeq 114,67m$

Osservazione

Il camion rallenta nei primi 8s percorrendo circa 115 metri, quindi riprende ad accelerare. In **Figura 2** il punto B(8m;114,67m) è di flesso per la curva. Gli esperti di analisi matematica riconoscono che la concavità della curva è rivolta verso il basso nell'intervallo [0;8[secondi e verso l'alto nell'intervallo]8;12] secondi.

Segue il diagramma orario della posizione.

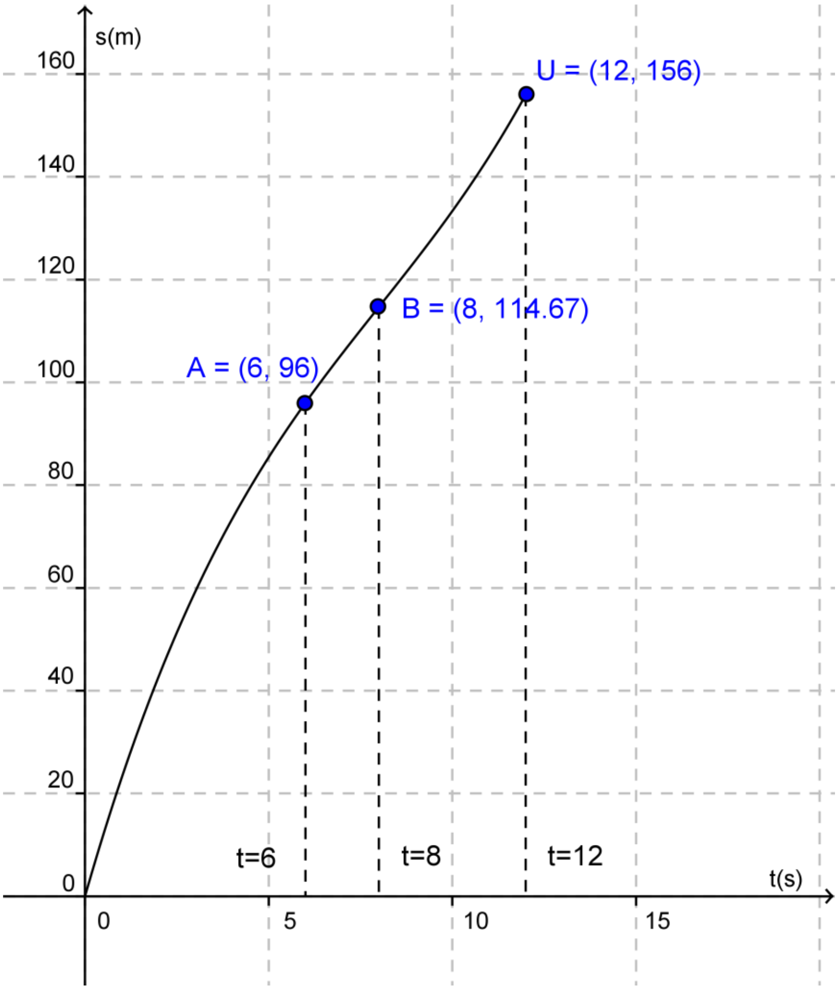

Figura 2- Legge oraria della posizione del camion durante l'attraversamento della galleria, lunga 156m.