

Calore attraverso una finestra a doppi vetri

Problema

Determinare la quantità di calore che fluisce in un secondo attraverso un metro quadrato di una finestra a doppi vetri composta da due lastre di vetro di spessore d_1 separate da uno strato di aria di spessore d_2 , nell'ipotesi che i valori delle temperature alle quali si trovano le due facce esterne delle lastre di vetro siano T_i , T_e .

Coefficienti di conducibilità:

Vetro $k_1 = 0,84 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$

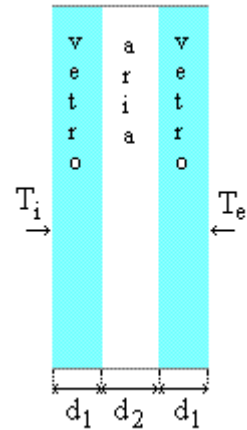
Aria $k_2 = 0,0234 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$

Caso particolare

Calcolare la quantità di calore che attraversa in un'ora una finestra a doppi vetri avente le seguenti caratteristiche:

$d_1 = 0,4\text{cm}$; Area della superficie: 1 m^2 ; $d_2 = 2,0\text{cm}$

sapendo che la temperatura interna alla stanza è 20°C e quella esterna è 8°C .



Soluzione

Premessa

Il calore fluisce attraverso i corpi propagandosi dalla parte del corpo a temperatura maggiore alla parte del corpo a temperatura minore.

Nella risoluzione del problema supponiamo che risulti $T_i > T_e$, corrispondente al caso di una finestra con doppi vetri che separi l'ambiente interno di una stanza dall'ambiente esterno ad una casa, con la temperatura esterna più bassa di quella interna alla casa (situazione tipica invernale).

La rapidità con cui fluisce il calore attraverso un corpo dipende dalle caratteristiche chimico-fisiche del corpo. La legge che governa il flusso di calore è nota come **legge di Fourier** la cui espressione è

$$Q = k \frac{A \cdot \Delta T}{d} \cdot \Delta t$$

nella quale

- k rappresenta il coefficiente di conducibilità (o conduttività) termica del materiale;
- A la misura dell'area di una sezione del corpo perpendicolare alla direzione del flusso di calore;
- d è lo spessore del corpo, ovvero la distanza tra le due estremità che si trovano alle temperature T_i , T_e ;
- ΔT è la differenza di temperatura esistente alle estremità del corpo conduttore;
- Δt è la misura dell'intervallo di tempo di durata del fenomeno fisico.

Soluzione del problema

Per risolvere il problema in esame è necessario introdurre due elementi ulteriori, precisamente

- la temperatura T_1 alla quale si trova la faccia interna della lastra di vetro della finestra la cui faccia esterna è alla temperatura T_i ;
- la temperatura T_2 alla quale si trova la faccia interna della lastra di vetro della finestra la cui faccia esterna è alla temperatura T_e .

Osserviamo che quando lo scambio di calore ha raggiunto la situazione di regime, in uno stesso intervallo di tempo la quantità di calore che fluisce attraverso ciascuna delle due lastre di vetro è la stessa e coincide con la quantità di calore che fluisce anche attraverso lo strato di aria; siano perciò Q_1 , Q_2 , Q_3 le quantità di calore che fluiscono rispettivamente attraverso la lastra di vetro a contatto con l'ambiente interno alla stanza, allo strato di aria, alla lastra esterna di vetro. Indicando rispettivamente con d_1 ed A lo spessore e l'area di ciascuna delle due lastre di vetro, con d_2 lo spessore dello strato di aria, applicando la legge di Fourier per un intervallo di tempo di misura Δt secondi possiamo scrivere:

$$Q_1 = k_1 \frac{A \cdot (T_i - T_1)}{d_1} \cdot \Delta t; \quad Q_2 = k_2 \frac{A \cdot (T_1 - T_2)}{d_2} \cdot \Delta t; \quad Q_3 = k_1 \frac{A \cdot (T_2 - T_e)}{d_1} \cdot \Delta t$$

Imponendo che sussistano le uguaglianze

$$Q_1 = Q_2, \quad Q_1 = Q_3$$

si ottiene un sistema di due equazioni che risolto permette di determinare i valori delle temperature T_1, T_2 . Il sistema di equazioni è

$$\begin{cases} k_1 \frac{A \cdot (T_i - T_1)}{d_1} \cdot \Delta t = k_2 \frac{A \cdot (T_1 - T_2)}{d_2} \cdot \Delta t \\ k_1 \frac{A \cdot (T_i - T_1)}{d_1} \cdot \Delta t = k_1 \frac{A \cdot (T_2 - T_e)}{d_1} \cdot \Delta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 d_2 \cdot (T_i - T_1) = k_2 d_1 \cdot (T_1 - T_2) \\ T_i - T_1 = T_2 - T_e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_2 = \frac{k_2 d_1 T_i + (k_1 d_2 + k_2 d_1) T_e}{k_1 d_2 + 2k_2 d_1} \\ T_1 = \frac{(k_1 d_2 + k_2 d_1) T_i + k_2 d_1 T_e}{k_1 d_2 + 2k_2 d_1} \end{cases}$$

Possiamo ora calcolare la quantità di calore che fluisce attraverso una delle due lastre di vetro, o attraverso lo strato di aria. Scegliamo di determinare il valore Q_1 .

$$Q_1 = k_1 \frac{A \cdot \Delta t}{d_1} \cdot \left[T_i - \frac{(k_1 d_2 + k_2 d_1) T_i + k_2 d_1 T_e}{k_1 d_2 + 2k_2 d_1} \right] = \frac{k_1 k_2 A \cdot (T_i - T_e)}{k_1 d_2 + 2k_2 d_1} \cdot \Delta t$$

Per rispondere alla richiesta del problema basta sostituire alle grandezze k_1, k_2, d_1, d_2 i rispettivi valori e porre $A=1 \text{ m}^2, \Delta t=1$.

Osservazione

La rapidità con cui il calore fluisce è data dal rapporto tra la quantità di calore fluìto ed il tempo in cui tale flusso si è verificato. Si ha

$$\frac{Q_1}{\Delta t} = \frac{k_1 k_2 A \cdot (T_i - T_e)}{k_1 d_2 + 2k_2 d_1}$$

Questo valore rappresenta anche la potenza termica dissipata attraverso la finestra. Ponendo $A=1 \text{ m}^2$ si ottiene la potenza termica dissipata per unità di superficie attraverso quel particolare tipo di finestra a doppi vetri.

Caso particolare proposto

Calcoliamo ora la quantità di calore che si disperde attraverso una finestra con doppi vetri ciascuno dei quali ha spessore $d_1=4\text{mm}$, separati da uno strato di aria di spessore $d_2=20\text{mm}$, con la temperatura interna di 20°C , quella esterna di 8°C . Il calcolo si riferisce ad una finestra di estensione 1m^2 e per un intervallo di tempo di un'ora.

Con i simboli utilizzati in precedenza si ha

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{k_1 k_2 A \cdot (T_i - T_e)}{k_1 d_2 + 2k_2 d_1} \cdot \Delta t \\ &= \frac{0,84 \cdot \text{Wm}^{-1}\text{C}^{-1} \cdot 0,0234 \cdot \text{Wm}^{-1}\text{C}^{-1} \cdot 1\text{m}^2 \cdot (20-8)^\circ\text{C}}{0,84 \cdot \text{Wm}^{-1}\text{C}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\text{m} + 2 \cdot 0,0234 \cdot \text{Wm}^{-1}\text{C}^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\text{m}} \cdot 1 \cdot 3600\text{s} \approx 49987 \text{ J} \end{aligned}$$