Problema di Termodinamica

Calcolo del lavoro in un'espasione adiabatica di un gas biatomico

Calcolare il lavoro compiuto da una mole di aria (da considerare come gas perfetto biatomico) in un'espansione adiabatica nella quale il volume finale diventa 4 volte quello iniziale, nell'ipotesi che la temperatura iniziale sia di 250 °C.

Elaborazioni

1) Una trasformazione adiabatica ha equazione PV^{γ}=Cost. Dall'equazione di stato dei gas perfetti PV=nRT, per n moli di gas, si deduce che
$PV = nRT \to P = \frac{nRT}{V}$, quindi anche $PV^{\gamma} = Cost.1 \to \frac{nRT}{V} \cdot V^{\gamma} = Cost.1 \to TV^{\gamma-1} = \frac{Cost.1}{nR} = Cost.2$.
Pertanto, se consideriamo gli stati iniziale e finale della trasformazione possiamo scrivere l'uguaglianza
$T_i V_i^{\gamma-1} = Cost.2 = T_f V_f^{\gamma-1}$, dalla quale deduciamo che $\frac{T_i}{T_f} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1}$.
Poiché è noto che il volume finale è il quadruplo di quello iniziale $V_f = 4V_i$ si ottiene
$\frac{T_i}{T_f} = \left(\frac{4V_i}{V_i}\right)^{\gamma-1} = 4^{\gamma-1}$, quindi $T_f = \frac{T_i}{4^{\gamma-1}}$ (*)

2) Per il primo principio della termodinamica in una trasformazione seguita da un gas ideale il calore (Q) scambiato è uguale alla somma del lavoro (L) eseguito con la variazione dell'energia interna (ΔU). Poiché la trasformazione in oggetto è adiabatica non vi è scambio di calore, dunque Q=0, si ottiene l'equazione L+ΔU=0, da cui L=-ΔU.
D'altro canto, per n moli di gas, risulta anche
$\Delta U = nc_V(T_f - T_i)$ che per la (*) assume la forma
$\Delta U = nc_V\left(T_f - T_i\right) = nc_V\left(\frac{T_i}{4^{\gamma-1}} - T_i\right) = nc_V\left(\frac{1}{4^{\gamma-1}} - 1\right) \cdot T$
Il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione è perciò
$L = -\Delta U = nc_V\left(1 - \frac{1}{4^{\gamma-1}}\right) \cdot T_i$, con n=1, perché si ha una mole di aria.
A questo punto ricordiamo che per un gas perfetto biatomico i calori specifici molari sono:
$c_V = \frac{f}{2}R = \frac{5}{2}R$, $c_P = c_V + R$ (relazione di Mayer)$\to$ $c_P = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$;
il coefficiente adiabatico γ vale
$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{7}{2}R : \frac{5}{2}R = \frac{7}{5} = 1{,}4$
per cui il lavoro eseguito dal gas nella trasformazione vale
$L = 1(mol) \cdot c_V\left(1 - \frac{1}{4^{\gamma-1}}\right) \cdot T_i = \frac{5}{2}(mol)R \cdot \left(1 - \frac{1}{4^{1{,}4-1}}\right) \cdot T_i = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^{0{,}4}}\right) \cdot RT_i(mol)$.

3) **Conclusione**
La temperatura iniziale del gas espressa in Kelvin è T_i=(250+273,15)K≈523K.
Con $R = 8{,}314\frac{J}{mol \cdot K}$ determiniamo il valore richiesto del lavoro L eseguito dal gas.
$L = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^{0{,}4}}\right) \cdot (mol)RT_i = 2{,}5 \cdot \left(1 - 4^{-0{,}4}\right) \cdot (mol) \cdot 8{,}314\frac{J}{mol \cdot K} \cdot 523K = 4627J$.