# Un problema sulle adiabatiche

**Problema**

Un gas ideale monoatomico è contenuto in un recipiente isolato termicamente di capacità 80,0 litri. Il gas si trova alla temperatura di 320K e alla pressione 110kPa.

a) Si sottopone il gas ad una compressione fino a portarlo alla pressione di 150 kPa. Determinare il volume e la temperatura del gas alla fine della trasformazione.

Ris. V=66,4dm$^3$; T=362k

b) Facendo riferimento sempre alle condizioni iniziali assegnate per il sistema gassoso, determinare a quale pressione lo si deve portare affinché la sua temperatura si abbassi di 30K.

Ris. P=86kPa

c) Calcolare il lavoro eseguito dal gas nelle due trasformazioni descritte in a) e b).

Risp. a) -1,73kJ; b) 1,24 kJ

**Risoluzione**

Osserviamo subito che dall'essere il gas contenuto in un recipiente isolato termicamente durante le trasformazioni che subisce non può scambiare calore con l'ambiente esterno, dunque le trasformazioni cui è sottoposto sono adiabatiche.

a) Indichiamo con 1 lo stato fisico iniziale e 2 lo stato fisico corrispondente alla pressione di 150 kPa.

Dunque $V_1 = 80dm^3$ ; $T_1$=320K ; $P_1$=110 kPa $V_2 = ?$; $T_2$=? ; $P_2$=150 kPa

La legge delle adiabatiche è $PV^\gamma = \cos t.$, quindi relativamente ai due stati fisici 1, 2 risulta $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$. Il valore del coefficiente adiabatico, trattandosi di un gas ideale monoatomico, vale

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3}.$$ Si ricava

$$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma \to V_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_1 = \left(\frac{110kPa}{150kPa}\right)^{\frac{3}{5}} 80dm^3 \simeq 66,4dm^3$$

Calcolo della **temperatura** nello stato 2.

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ha

$P_1V_1 = nRT_1$ ( per lo stato 1), $P_2V_2 = nRT_2$ ( per lo stato 2);

dal rapporto membro a membro delle due uguaglianze si deduce

$$\frac{nRT_2}{nRT_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} \rightarrow T_2 = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} \cdot T_1 = \frac{150kPa \cdot 66,4dm^3}{110kPa \cdot 80,0dm^3_1} \cdot 320K \simeq 362K$$

b) Indichiamo con 3 lo stato fisico in cui il gas si troverà alla temperatura $T_3$=(320-30)K=290K. Dobbiamo calcolare la pressione $P_3$ . Utilizziamo ancora l'equazione di stato dei gas perfetti nell'uguaglianza ottenuta in applicazione della legge delle adiabatiche per il passaggio dallo stato fisico 1 allo stato fisico 3.

$P_1V_1^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma}$ che elaboriamo come segue

$$P_1V_1V_1^{\gamma-1} = P_3V_3V_3^{\gamma-1} \rightarrow nRT_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = nRT_3V_3^{\gamma-1} \rightarrow V_3^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_3} \cdot V_1^{\gamma-1} \rightarrow V_3 = \left(\frac{T_1}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V_1 = \left(\frac{320K}{290K}\right)^{\frac{1}{\frac{5}{3}-1}} \cdot 80dm^3 =$$

$$\left(\frac{32}{29}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 80dm^3 \simeq 92,7dm^3$$ (volume del gas nello stato fisico 3).

Per calcolare ora la pressione nello stato finale utilizziamo direttamente l'equazione dedotta dalla legge delle adiabatiche.

$$P_1V_1^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma} \rightarrow P_3 = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma} \cdot P_1 = \left(\frac{80,0dm^3}{92,7dm^3}\right)^{5/3} \cdot 110kPa = 86kPa$$

c) Calcolo del **lavoro eseguito dal gas** nelle due trasformazioni precedenti.

Applichiamo il primo principio della termodinamica.

Sappiamo che in ogni trasformazione termodinamica il calore Q scambiato dal gas con l'ambiente esterno è uguale alla somma del lavoro L eseguito dal gas con la variazione dell'energia interna ΔU che si verifica: $Q = L + \Delta U$ . Nelle trasformazioni in esame il sistema non scambia calore con l'ambiente esterno perché il contenitore del gas è isolato termicamente, dunque il primo principio si scrive nella forma $L + \Delta U = 0$ , da cui $L = -\Delta U$ .

Ricordiamo ora che per **n moli di un gas ideale,** che sottoposte ad una trasformazione termodinamica subiscono una variazione di temperatura $\Delta T = T_f - T_i$ , la variazione di energia interna è $\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$ , dove *f* è il numero dei **gradi di libertà del gas** ed $R = 8,314\frac{J}{K \cdot mol}$ è la costante dei gas perfetti. Nel caso di un gas monoatomico risulta *f* =3.

Ciò premesso, in ciascuna delle due trasformazioni adiabatiche considerate il lavoro eseguito dal gas è

$$L = -\Delta U = -\frac{3}{2} nR\Delta T = -\frac{3}{2} nR\left(T_f - T_i\right).$$

Per calcolare il lavoro nei due casi dobbiamo conoscere la quantità di gas, cioè il numero di moli; possiamo determinare questo valore utilizzando lo stato fisico iniziale per il quale conosciamo le tre coordinate termodinamiche pressione, volume e temperatura.

$$n=\frac{P_1V_1}{RT_1}=\frac{110kPa\cdot 80\cdot 10^{-3}m^3}{8,314\frac{J}{K\cdot mol}\cdot 320K}\simeq 3,31mol$$

Siamo in grado ora di trovare il lavoro compiuto dal gas.

a) $L=-\frac{3}{2}nR\left(T_2-T_1\right)=-\frac{3}{2}\cdot 3,31mol\cdot 8,314\frac{J}{K\cdot mol}\left(362-320\right)K\simeq -1.734J\simeq -1,73kJ$

Osserviamo che il lavoro è negativo e ciò perché il gas viene compresso, infatti il suo volume passa da 80,0 a 66,4 litri.

b) $L=-\frac{3}{2}nR\left(T_3-T_1\right)=-\frac{3}{2}\cdot 3,31mol\cdot 8,314\frac{J}{K\cdot mol}\left(290-320\right)K\simeq 1.238J\simeq 1,24kJ$

In questo caso il lavoro compiuto dal sistema è positivo, come in effetti deve essere visto che il gas si espande passando il suo volume da 80,0 a 92,7 litri.