

Statica

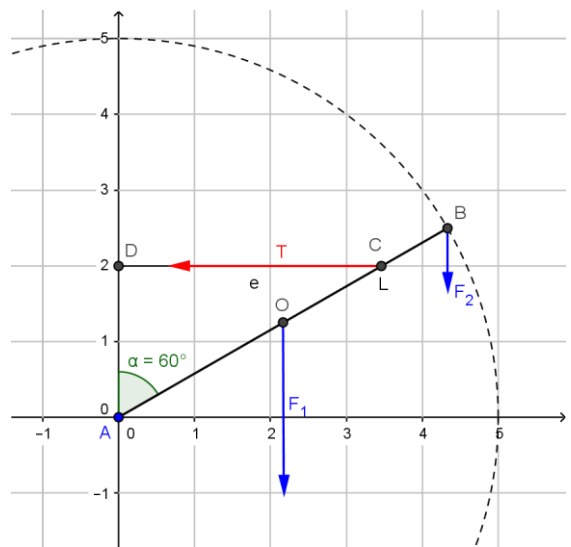
Equilibrio di una sbarra inclinata con carico e fune di sostegno

Una sbarra omogenea AB di lunghezza $L=5\text{m}$ e massa $M=50\text{Kg}$, sorregge tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile un blocco di massa $m=10\text{Kg}$. L'altra estremità della sbarra è fissata all'angolo dello spigolo tra pavimento e parete. Una seconda fune inestensibile e di massa trascurabile DC, tesa orizzontalmente sorregge la sbarra, con $AC=4\text{m}$. Sapendo che l'angolo formato dalla sbarra con la parete verticale è di 60° determinare le componenti della reazione vincolare esercitata in A sulla sbarra. (Vedere la figura).

Soluzione

1) Sulla sbarra agiscono le seguenti forze:

- la forza peso F_1 della sbarra applicata nel suo baricentro, che per le ipotesi sulla struttura della sbarra coincide con il punto medio O del segmento AB rappresentativo della sbarra; la forza è diretta lungo la verticale per O e orientata verso il basso;
- la forza F_2 del peso della massa m applicata nell'estremo B, trasmessa alla sbarra tramite la fune inestensibile e di massa trascurabile; la forza è diretta lungo la verticale per B e orientata verso il basso;
- la tensione T della fune inestensibile e di massa trascurabile applicata alla sbarra nel punto C diretta orizzontalmente verso la parete verticale;
- la reazione vincolare R esercitata nell'estremo A dalla parete e dal pavimento la cui direzione non è nota.



Nella figura riportata sono indicate le forze F_1 , F_2 , T ma non la reazione vincolare R . Nella risoluzione facciamo l'ipotesi che tutte le forze giacciono nel piano verticale passante per il baricentro O della sbarra.

- Per risolvere il problema in esame adottiamo il sistema di riferimento cartesiano ortogonale Axyz, con l'asse x orientato verso destra, l'asse y lungo la verticale e orientato da A a D, l'asse z ortogonale ai due precedenti assi e orientato in modo che la terna dei tre assi sia levogira. Nel nostro riferimento il piano Axy è il piano del foglio e l'asse z è uscente dal piano del foglio.
- Il problema si risolve applicando le due equazioni cardinali della statica: la somma delle forze applicate alla sbarra sia nulla, la somma dei momenti delle forze applicate alla sbarra calcolati rispetto ad un qualsiasi punto sia nulla. Per il calcolo dei momenti delle forze è opportuno scegliere come polo il punto A.

Espressioni cartesiane delle forze

$$\vec{F}_1 = F_{1y} \vec{j}; \quad \vec{F}_2 = F_{2y} \vec{j}; \quad \vec{T} = T_x \vec{i}; \quad \vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

con $F_{1y} = -Mg$, $F_{2y} = -mg$, essendo $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ l'accelerazione di gravità.

Equazione della somma delle forze:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{T} + \vec{R} = 0, \text{ che diventa } (T_x + R_x) \vec{i} + (F_{1y} + F_{2y} + R_y) \vec{j} = 0 \rightarrow \\ (T_x + R_x) \vec{i} + (-Mg - mg + R_y) \vec{j} = 0$$

Quindi deve sussistere il seguente sistema

$$\begin{cases} T_x + R_x = 0 \\ -Mg - mg + R_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_x = T \\ R_y = (M + m)g \end{cases} \quad (1)$$

Per quanto concerne l'equazione cardinale dei momenti la sua espressione vettoriale è

$$\vec{AO} \wedge \vec{F}_1 + \vec{AB} \wedge \vec{F}_2 + \vec{AC} \wedge \vec{T} = 0 \quad (2)$$

essendo nullo il momento della reazione vincolare $\vec{R}$ perché applicata nel polo A.

Ricordiamo che il prodotto vettoriale di due vettori ha come modulo il prodotto dei moduli dei due vettori per il seno dell'angolo che il primo vettore forma con il secondo, di ampiezza non superiore a 180° , di cui il primo vettore deve ruotare nel verso antiorario per sovrapporsi alla direzione del secondo vettore; inoltre, il prodotto vettoriale dei due vettori, nessuno dei quali sia il vettore nullo, è un vettore perpendicolare al piano individuato dai primi due.

Tutto ciò premesso, indicando con $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_3$ rispettivamente i momenti delle forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{T}$, si ha

$$\vec{\tau}_1 = -|\vec{AO}| \cdot |\vec{F}_1| \sin(120^\circ) \vec{k} = -\frac{L}{2} \cdot Mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k};$$

$$\vec{\tau}_2 = -|\vec{AB}| \cdot |\vec{F}_2| \sin(120^\circ) \vec{k} = -L \cdot mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k};$$

$$\vec{\tau}_3 = |\vec{AC}| \cdot |\vec{T}| \sin(150^\circ) \vec{k} = \frac{4}{5} L \cdot T \cdot \frac{1}{2} \vec{k} = \frac{2}{5} L \cdot T \cdot \vec{k}$$

avendo posto $|\vec{AB}| = L$.

La somma dei momenti è dunque il vettore

$$\vec{\tau} = \left(-\frac{L}{4} \cdot Mg \cdot \sqrt{3} - L \cdot mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{5} L \cdot T \right) \vec{k} = \frac{L}{20} (-5Mg\sqrt{3} - 10mg\sqrt{3} + 8T) \vec{k}$$

Poiché per l'equilibrio deve risultare nullo questo vettore dovrà essere

$-5Mg\sqrt{3} - 10mg\sqrt{3} + 8T = 0$, da cui si ricava

$$T = \frac{(5M + 10m)g\sqrt{3}}{8} = \frac{(5 \cdot 50Kg + 10 \cdot 10Kg)9,81(ms^{-2})\sqrt{3}}{8} \simeq 743N$$

Ritornando al sistema (1) possiamo esprimere i valori delle componenti della reazione vincolare $\vec{R}$.

$$\begin{cases} R_x = T = 743N \\ R_y = (60Kg) \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \simeq 589N \end{cases}$$