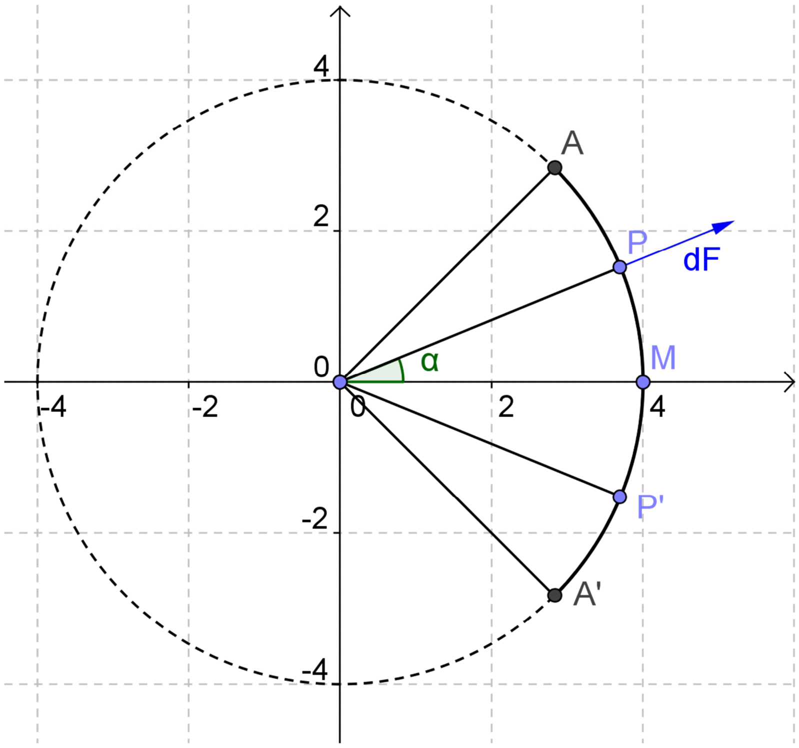
Azione di un campo di forze radiali su una guida circolare

Problema



Una guida a forma di arco di circonferenza di raggio r, con angolo al centro di 90 °, è sottoposta all'azione di un campo di forze radiali la cui intensità per unità di lunghezza è q. Determinare la risultante delle forze agenti sull'arco ritenendo questo rigido.

Risoluzione

In figura è rappresentato l'arco AA', quarta parte della circonferenza di raggio r con centro nell'origine degli assi cartesiani. Abbiamo indicato con M il punto medio dell'arco.

Consideriamo un punto P del primo quadrante dell'arco AM; e sia $\overrightarrow{dF}$ la forza radiale agente sull'elemento ds di arco centrato in P. Avendo indicato con α la misura in radianti dell'angolo formato dal raggio OP con il semiasse positivo delle ascisse risulta $ds = rd\alpha$ e l'intensità della forza radiale dF agente sull'elemento di arco ds è $dF = qds = qrd\alpha$.

Il vettore $\overrightarrow{dF}$ può essere decomposto rispetto agli assi cartesiani nel seguente modo:

$$\overrightarrow{dF} = (qrd\alpha)\cdot\cos\alpha\vec{i} + (qrd\alpha)\cdot sen\alpha\vec{j}$$

Osserviamo ora che se consideriamo l'elemento di arco ds' centrato nel punto P', simmetrico di P rispetto all'asse x, la corrispondente forza radiale agente su ds', per la simmetria della figura, ha espressione

$$\overrightarrow{dF}' = (qrd\alpha)\cdot\cos\alpha\vec{i} - (qrd\alpha)\cdot sen\alpha\vec{j}$$

e quindi la somma delle due forze elementari è un vettore diretto lungo l'asse delle ascisse:

$$\overrightarrow{dF} + \overrightarrow{dF}' = 2(qrd\alpha)\cdot\cos\alpha\vec{i}$$

Calcolo della forza complessiva agente sull'arco AA'

Evidentemente, se facciamo muovere il punto P sull'arco MA e sommiamo i contributi alla forza complessiva agente sull'arco delle coppie di forze elementari che agiscono nei punti P, P', otteniamo come risultante una forza che sarà applicata in M ed avente direzione solo lungo l'asse x.

L'intensità della forza risultante F è il valore del seguente integrale definito:

$$F=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(qrd\alpha)\cdot\cos\alpha = 2qr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\alpha d\alpha = 2qr\left[sen\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2qr\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)=qr\sqrt{2}$$

Osservazione

L'intensità della forza risultante sull'arco è pari al prodotto dell'intensità q della forza per unità di lunghezza per la lunghezza della corda sottesa dall'arco; infatti $r\sqrt{2}$ è la misura della corda AA'.