

Onde prodotte con oscillazioni armoniche

Problema

Una punta vibra in uno stagno con moto armonico alla frequenza di 50Hz producendo onde alte 20cm. Dopo aver prodotto 200 onde la prima onda si trova a distanza 12,50m dalla sorgente.

- 1) Calcolare la lunghezza d'onda e la velocità con cui le onde si propagano nel mezzo.
- 2) Nell'ipotesi che nell'istante $t=0s$ l'ampiezza dell'onda è -20cm, scrivere l'equazione dell'ordinata di un punto interessato dal moto ondoso in funzione della distanza x dalla sorgente.

Elaborazioni

- 1) **Frequenza di vibrazione** $f=50\text{Hz}$

Periodo del moto ondoso $T=1/f=0,02s$

Osserviamo che sono state prodotte 200 onde; poiché ne vengono generate 50 al secondo, si deduce che dall'inizio della vibrazione sono trascorsi $200:50s^{-1}=4s$.

Lunghezza d'onda

Osservato che in 12,50m sono contenute 200 onde, la lunghezza λ di ciascuna onda è $\lambda=\text{Distanza_percorsa}/200=12,50m/200=6,25cm$

Velocità di propagazione

Si ottiene dalla relazione $V=\lambda/T=\lambda f=6,25cm \cdot 50s^{-1}=3,125m/s$

- 2) **Legge oraria della quota**

Per la descrizione assumiamo un sistema di riferimento cartesiano xOy , con l'asse delle ascisse sulla superficie dello stagno, l'asse delle ordinate perpendicolare alla superficie dello stagno e orientato verso l'alto; l'origine sulla superficie dello stagno.

Trattandosi di un'oscillazione armonica, l'ordinata del punto vibrante rispetto al piano orizzontale della superficie dello stagno è $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$; nella forma $A=20cm$ è l'ampiezza dell'oscillazione (quindi anche di ciascuna onda prodotta), ω è la pulsazione e φ_0 la fase nell'istante iniziale $t=0s$.

Ampiezza Sappiamo che l'ampiezza delle oscillazioni è $A=20cm$.

Pulsazione Si ha $\omega=2\pi/T=2\pi \cdot 50s^{-1}=100\pi s^{-1}$.

Dobbiamo determinare la **fase iniziale** φ_0 .

Si sa che $y(0s)=-20cm$, quindi

$$y(0s) = A\cos(\omega \cdot 0s + \varphi_0) = A\cos(\varphi_0) = 0,20(m)\cos(\varphi_0) = -0,20m$$

da cui $\cos(\varphi_0) = -1$, quindi $\varphi_0 = \pi$.

L'equazione oraria dell'**ordinata della punta vibrante** è

$$y(t) = 0,20(m) \cos(100\pi(s^{-1})t + \pi) = -0,20(m) \cos(100\pi(s^{-1})t) \quad (1)$$

Sia **P** un punto a distanza x dalla sorgente.

Il moto ondoso per arrivare nel punto P impiega un numero di secondi pari a x/V , quindi il suo moto di oscillazione è ritardato rispetto al punto O della sorgente di x/V secondi; questa osservazione permette di ricavare la quota del punto P nell'istante t a partire dalla quota della sorgente e quindi sfruttando la (1). Dunque, la quota del punto P nell'istante t è uguale alla quota che aveva il punto O nell'istante $t' = t - x/V$ e perciò risulta

$$y(x;t) = -0,20(m) \cos\left(100\pi(s^{-1})\left(t - \frac{x}{V}\right)\right) \quad (2)$$

Se nella (2) si pone $x=0$ si ottiene la legge oraria della quota della punta vibrante. Assegnando ad x un valore qualsiasi positivo si ottiene la legge oraria delle quote di tutti i punti della circonferenza avente centro in O e raggio x metri.

L'insieme dei punti di ogni circonferenza di raggio x e centro O oscillano in fase (e costituiscono un fronte d'onda)

La legge (2) è la **funzione d'onda** che si propaga nel mezzo elastico costituito dall'acqua dello stagno.

Con $V=3,125m/s$ la (2) diventa

$$y(x;t) = -0,20(m) \cos\left(100\pi(s^{-1})\left(t - \frac{x}{3,125ms^{-1}}\right)\right) \quad (3)$$

Ponendo nella (3) $t=4s$ si ottiene il profilo del treno d'onde generato dalla sorgente nei primi quattro secondi, nell'intesa che si siano trascurati gli smorzamenti dovuti all'attrito esistente tra le molecole dell'acqua, che via via riducono l'ampiezza delle oscillazioni dei punti. Sperimentalmente si osserva che con l'aumentare della distanza dei punti dalla sorgente l'ampiezza delle oscillazioni degli stessi diminuisce.

Riportiamo in figura solo il profilo delle prime dieci onde generate.

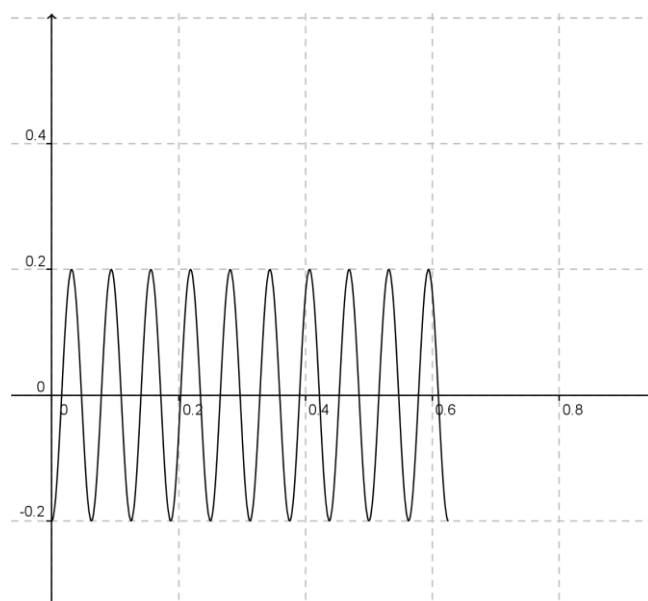


Figura 1- In figura sono rappresentate le prime dieci onde, che si estendono per 0,625m dalla sorgente O