Dinamica dei fluidi

Nota teorica sulla legge di Poiseuille

Vogliamo soffermarci sulla **legge di Poiseuille** che fornisce l'espressione della differenza di pressione esistente tra gli estremi di un tubo a sezione circolare in cui scorre un fluido viscoso, di coefficiente η, in funzione del raggio r e della lunghezza L del tubo, della velocità media[1] v di scorrimento delle particelle, nell'ipotesi che il flusso sia laminare, cioè in assenza di vortici. In questa ipotesi tutte le particelle del fluido che attraversano in un certo istante una stessa sezione normale del tubo si muovono con la stessa velocità v.

Indicando brevemente con 1 e 2 le due estremità, con P_1, P_2 i rispettivi valori della pressione alle due estremità la legge è la seguente

$$P_1 - P_2 = 8\pi\eta \cdot \frac{vL}{A} \qquad (1)$$

nella quale A indica l'area di una sezione normale de tubo, L la lunghezza dello stesso, v la velocità delle particelle del fluido, η il coefficiente di viscosità del fluido.

Dalla (1) si evince che **la differenza di pressione è direttamente proporzionale al coefficiente di viscosità, alla velocità di scorrimento del fluido e alla lunghezza del tubo, mentre è inversamente proporzionale alla sezione del tubo**.

Dalla (1) si può determinare l'espressione della velocità di scorrimento v in funzione delle altre grandezze:

$$v = \frac{(P_1 - P_2)\cdot A}{8\pi\eta \cdot L} \qquad (2)$$

Un aspetto caratteristico di un fluido incompressibile che scorre in un condotto in assenza di dispersioni e di immissioni è quello della costanza del prodotto della velocità media delle particelle per l'area della sezione normale del condotto. Questa uguaglianza

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \qquad (3)$$

è conosciuta come **legge di continuità** o equazione di continuità.

In prossimità di una sezione A del condotto dove la velocità è v, nel tempo Δt le particelle si spostano di un tratto $\Delta x = v \cdot \Delta t$ e se la sezione nel tratto si mantiene costante allora $v \cdot \Delta t \cdot A$ rappresenta il volume ΔV di fluido che nel tempo Δt transita attraverso la sezione. Il prodotto $\boldsymbol{v \cdot A}$ rappresenta la **quantità di fluido che nell'unità di tempo attraversa la sezione del fluido** ed è detta **portata del condotto**. In simboli

$$Q = v \cdot A = \frac{v \cdot \Delta t \cdot A}{\Delta t} = \frac{\Delta x \cdot A}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (4)$$

---

[1] Le particelle di un fluido viscoso che scorre in un tubo non si muovono tutte con la stessa velocità: quelle vicine alle pareti del tubo si muovono più lentamente rispetto a quelle che ne sono lontane. Per questo motivo qui si considera la velocità media v delle particelle.

Mettendo insieme la (2) e la (4) possiamo scrivere

$$Q=\frac{\Delta V}{\Delta t}=v\cdot A=\frac{(P_1-P_2)\cdot A^2}{8\pi\eta\cdot L} \tag{5}$$

da cui anche

$$P_1-P_2=\frac{8\pi\eta\cdot L}{A^2}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{8\pi\eta\cdot L}{A^2}\cdot Q \tag{6}$$

La (6) indica quale deve essere la differenza di pressione tra gli estremi di un tubo di lunghezza L e di sezione costante A in cui scorre un fluido di coefficiente viscoso η se si vuole che nel tubo sia assicurata la portata Q.

Nel caso in cui il tubo sia a sezione circolare, indicando con r la misura del raggio di una sezione normale, risulta $A=\pi r^2$ e la (6) diventa:

$$P_1-P_2=\frac{8\pi\eta\cdot L}{A^2}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{8\pi\eta\cdot L}{(\pi r^2)^2}\cdot Q=\frac{8\eta\cdot L}{\pi r^4}\cdot Q \tag{6.1}$$

Jean Leonard Marie Poiseuille

Dalla (6.1) si ricava la seguente uguaglianza

$$Q=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{(P_1-P_2)\pi r^4}{8\eta\cdot L} \tag{7}$$

nota come **legge di Poiseuille**[2] .

Esempio applicativo della legge

*** ***

[2] Jean Leonard Marie Poiseuille (nato a Parigi il 22-04-1797 e deceduto a Parigi il 26-12-1869), medico e fisiologo Francese.