Applicazione della spinta di Archimede

Calcolare il volume di una cavità interna ad un blocco di ferro

Problema

Un blocco di ferro contiene una cavità al suo interno e viene pesato con un dinamometro prima in Aria e successivamente immergendolo in Acqua. I valori registrati per il peso (apparente) del blocco di ferro sono 250 N nella misura in Aria e 120 N nella misura in acqua.

1) Determinare le misure dei volumi del blocco e della cavità contenuta nello stesso. Calcolare la percentuale del volume del blocco rappresentato dal volume della cavità.
2) Sapendo che il blocco ha la forma di un parallelepipedo rettangolo con due facce quadrate di lato 25,0 cm determinare la misura della terza dimensione del blocco.

Dati

Densità del ferro: $\rho_{Fe} = 7{,}87 \cdot 10^3 \dfrac{Kg}{m^3}$;   densità dell'aria a 20°C: $\rho_{Aria} = 1{,}29 \dfrac{Kg}{m^3}$

Soluzione

Indichiamo con

V: il volume dell'intero blocco;

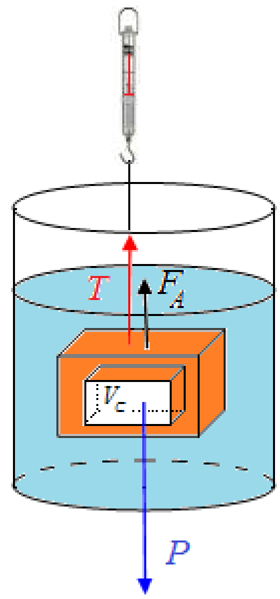
V_C: il volume della cavità;

P: il peso effettivo del blocco di ferro (peso rilevato nel vuoto);

m: massa del blocco di ferro;

g=9,81ms^{-2}: l'accelerazione di gravità;

$\rho_{Acqua} = 1000 \dfrac{Kg}{m^3}$.



Facciamo riferimento alla Figura riportata a lato per la misurazione in Acqua.

1) Nelle misurazioni occorre tener presente che sia in aria, sia in acqua, sul blocco di ferro agisce la spinta di Archimede esercitata dal fluido in cui è immerso, che è diretta secondo la verticale del luogo e orientata verso l'alto. Indichiamo con F_A l'intensità di detta spinta.

   Sul blocco di ferro in ciascuna misurazione, oltre alla spinta di Archimede, agiscono il peso **P** e la tensione **T** esercitata dal filo che lo lega al dinamometro. Il peso e la tensione sono dirette lungo la verticale con il peso orinato verso il basso e la tensione orientata verso l'alto [(1)]. In ciascuna misurazione il dinamometro rileverà il valore della tensione **T** e non il peso effettivo **P** del blocco di

[(1)] Nelle misurazioni del peso del blocco la massa del filo si considera trascurabile.

ferro e ciò si verificherà allorquando il blocco di ferro sarà in equilibrio e cioè quando la somma delle tre forze agenti sullo stesso avrà risultante nulla, dunque quando

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{F_A}=0 \qquad (*)$$

Per risolvere il problema in esame si devono determinare due incognite: i valori dei volumi V e V_c, rispettivamente del blocco di ferro e della cavità.

Scriviamo l'equazione dell'equilibrio (*) così come si presenterà nelle due misurazioni.

$\vec{P}+\vec{T}'+\vec{F_A}'=0,$ misurazione col blocco immerso in aria (1)

$\vec{P}+\vec{T}''+\vec{F_A}''=0$ misurazione col blocco immerso in acqua (2)

Determiniamo le espressioni scalari delle due equazioni vettoriali proiettate su un asse verticale orientato verso il basso. Si ha:

$$P-T'-F_A'=0 \qquad (1.1)$$

$$P-T''-F_A''=0 \qquad (1.2)$$

e risulta

$P=mg=\rho_{Fe}\cdot(V-V_c)g$, $F_A'=\rho_{Aria}\cdot V\cdot g$, $F_A''=\rho_{Acqua}\cdot V\cdot g$, con $T'=250N$ e $T''=120N$.

Le due espressioni (1.1), (1.2) diventano

- $\rho_{Fe}\cdot(V-V_c)g-T'-\rho_{Aria}\cdot V\cdot g=0$, da cui

  $\rho_{Fe}\cdot(V-V_c)g=T'+\rho_{Aria}\cdot V\cdot g$; (1.1.1)

- $\rho_{Fe}\cdot(V-V_c)g-T''-\rho_{Acqua}\cdot V\cdot g=0$, da cui

  $\rho_{Fe}\cdot(V-V_c)g=T''+\rho_{Acqua}\cdot V\cdot g$. (1.2.1)

Dal confronto dei secondi membri delle (1.1.1), (1.2.1) si ottiene un'equazione nell'incognita V, che risolta permette di trovare il valore di V.

$$T'+\rho_{Aria}\cdot V\cdot g=T''+\rho_{Acqua}\cdot V\cdot g \rightarrow V=\frac{T'-T''}{(\rho_{Acqua}-\rho_{Aria})g}$$

Sostituendo i valori delle grandezze note si ha:

$$V=\frac{(250-120)N}{(1000-1,29)\frac{Kg}{m^3}\cdot 9,81\frac{m}{s^2}}\approx 0,01327m^3=13,27dm^3$$ (volume del blocco di ferro).

Calcolo del volume della cavità

Si può ricavare V_c indifferentemente dalla (1.1.1) o dalla (1.2.1). Consideriamo la (1.1.1).

$$\rho_{Fe}\cdot(V-V_c)g=T'+\rho_{Aria}\cdot V\cdot g\rightarrow$$

$$V_c=V-\frac{T'+\rho_{Aria}\cdot V\cdot g}{\rho_{Fe}\cdot g}\approx 0,01327m^3-\frac{250N+1,29Kgm^{-3}\cdot 13,27\cdot 10^{-3}m^3\cdot 9,81ms^{-2}}{7,87Kgm^{-3}\cdot 9,81ms^{-2}}\approx$$
$$\left(0,01327-\frac{250,1679}{77204,7}\right)m^3\approx 0,01003m^3=10,03dm^3$$

Calcolo della percentuale del volume della cavità

Si deve determinare il rapporto

$$r=\frac{V_c}{V}=\frac{10,03\cdot 10^{-3}m^3}{13,27\cdot 10^{-3}m^3}\approx 75,58\%$$

2) **Valore della terza dimensione del blocco di ferro**

Due dimensioni del blocco di ferro misurano 25,0 cm; indicata con x la misura della terza dimensione risulta

$$\mathrm{V}=25,0^2cm^2\cdot xcm\rightarrow x=\frac{13,27\cdot 10^{-3}m^3}{25^2cm^2}=\frac{13,27\cdot 10^{-3}\cdot 10^6cm^3}{625cm^2}\approx 21,2cm$$