

Sulla propagazione degli errori nella stima di una grandezza derivata

Calcolo della densità del materiale di una pallina da ping-pong

Problema

Su un sito internet⁽¹⁾ a proposito delle palline di ping-pong si legge:

“L'attuale pallina da ping pong è composta di un materiale plastico chiamato "celluloide". La celluloide fu inventata nel 1868 da John Wesley Hyatt tramite un mix di nitrocellulosa contenente il 10-11% di azoto e plastificata con canfora. È anche nota come nitrato di cellulosa o celluloide.

*Le palline da ping pong, realizzate oramai da decenni in questo materiale, devono possedere **precise dimensioni e proprietà tecniche**, come il diametro di esattamente 40 millimetri (4 centimetri) ed un peso di 2,7 grammi.*

*Questi sono i requisiti della Federazione Italiana per considerare valide le palline ad uso competizione. La forma deve ovviamente essere sferica, mentre in quanto al colore delle palline da ping pong, nelle gare ufficiali è consentito impiegare **palline arancioni o bianche**.”*



Figura 1- Un sacchetto di palline da ping-pong.

Ciò premesso, considerato che il valore della misura di una grandezza non è mai esatto e che quindi per le misure del diametro (d) e della massa (m) della pallina si possa ritenere

$$d = (40,0 \pm 0,1) \text{ mm}, \quad m = (2,7 \pm 0,1) \text{ g},$$

determinare il valore della densità del materiale di cui sono fatte le palline da ping-pong.

Elaborazioni

Premessa - Nella risoluzione del problema si suppone che la pallina in oggetto sia una sfera piena.

- 1) Il volume di una sfera di raggio r è $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e poiché un diametro è la somma di due raggi $d = 2r$, esprimendo il volume in funzione del diametro si ha $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}d^3$.
- 2) La densità di un materiale è data dal rapporto tra una qualsiasi quantità di massa di quel materiale e il corrispondente volume occupato. Indicando con δ la densità si ha $\delta = \frac{m}{V}$.
- 3) Poiché i valori della massa e del volume sono incerti e sono legati da un quoziente, per determinare il valore della densità con la relativa incertezza è necessario determinare preliminarmente il valore principale (valore più probabile) e l'errore relativo per la densità, successivamente si determinerà l'errore assoluto, quindi si esprimerà correttamente la misura della densità. Ricordiamo che:

$$\varepsilon_r(\delta) = \varepsilon_r\left(\frac{m}{V}\right) = \varepsilon_r(m) + \varepsilon_r(V); \quad \varepsilon_r(m) = \frac{0,1\text{g}}{2,7\text{g}} \approx 0,0370 = 3,70 \cdot 10^{-2};$$

⁽¹⁾ <http://www.mondopingpong.org/pingpong/palline-da-pingpong.html>

$$\varepsilon_r(V) = \varepsilon_r\left(\frac{\pi}{6}d^3\right) = \varepsilon_r(d^3) = 3 \cdot \varepsilon_r(d) = 3 \cdot \varepsilon_r\left(\frac{0,1mm}{40,0mm}\right) = 3 \cdot 0,0025 = 0,0075 = 0,75 \cdot 10^{-2}$$

Dunque $\varepsilon_r(\delta) = 3,70 \cdot 10^{-2} + 0,75 \cdot 10^{-2} = 4,45 \cdot 10^{-2}$

Osservazione – Nel calcolo dell'errore relativo sul volume si è tenuto conto che il numero $\pi/6$ è una costante, quindi non è affetto d'errore.

Calcolo del valore principale della densità

Valore principale del volume $V_p(\text{volume}) = \frac{\pi}{6}(40,0mm)^3 \approx 33.493mm^3$

Valore principale della densità

$$V_p(\delta) = \frac{V_p(\text{massa})}{V_p(\text{volume})} = \frac{2,7g}{33.493mm^3} \approx 8,0614 \cdot 10^{-5} \frac{g}{mm^3},$$

avendo assunto per il calcolo $\pi=3,14$.

Errore assoluto per la densità

$$e_a(\delta) = e_r(\delta) \cdot V_p(\delta) = 4,45 \cdot 10^{-2} \cdot 8,0614 \cdot 10^{-5} \frac{g}{mm^3} \approx 0,3587 \cdot 10^{-5} \frac{g}{mm^3}$$

Verso la conclusione

Osserviamo a questo punto che l'errore assoluto con cui si può conoscere il valore della densità è circa $0,4 \cdot 10^{-5} \frac{g}{mm^3}$, quindi è incerta la prima cifra decimale riportata nel valore principale della grandezza scritto in notazione scientifica come riportato sopra, dunque vanno trascurate tutte le cifre successive e assumere come valore principale della grandezza il seguente

$$V_p(\delta) = 8,1 \cdot 10^{-5} \frac{g}{mm^3};$$

ne consegue che l'espressione corretta per la densità del materiale di cui è fatta la pallina da ping pong è

$$\delta = (8,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-5} \frac{g}{mm^3}, \text{ oppure } \delta = (8,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-2} \frac{g}{cm^3} \Leftrightarrow \delta = (0,081 \pm 0,004) \frac{g}{cm^3}$$

Luigi Lecci