Disco carico con una massa carica sospesa in equilibrio

Applicazione del campo elettrico- Calcolo integrale

Problema

Un disco carico positivamente, con densità superficiale σ, avente raggio R=10 cm, è disposto verticalmente rispetto al piano orizzontale π. Nel punto del bordo che si trova a quota maggiore è fissato un filo inestensibile di lunghezza *l* e massa trascurabile che ha al suo estremo libero una massa di 2g; la massa è portatrice di una carica q= $4\cdot10^{-8}$C. Sapendo che nella situazione di equilibrio la massa è disposta lungo l'asse di simmetria del disco perpendicolare al piano dello stesso e a distanza 2*cm* da questo, determinare la carica presente sul disco.

Soluzione

Strategia risolutiva

Sulla massa *m* agiscono la forza peso $m\vec{g}$, dovuta al campo gravitazionale terrestre, la forza elettrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$, dovuta al campo elettrico determinato dalla carica Q distribuita sulla superficie del disco e la forza di tensione $\vec{T}$ esercitata dal filo che mantiene legata la massa *m*. **La massa è in equilibrio** nella configurazione indicata nel testo e dunque la somma delle forze agenti su di essa è nulla: $m\vec{g} + q\vec{E} + \vec{T} = 0$. Sfruttando quest'equazione, una volta determinata l'intensità E del campo elettrico, si risalirà all'intensità della carica presente sul disco.

Richiamo sull'espressione del campo elettrico

Nel documento campo_elettrico disco_carico_20110821.doc è stata determinata l'espressione del campo elettrico generato dalla carica presente in modo uniforme sulla superficie di un disco di raggio R nei punti dell'asse di simmetria del disco perpendicolare al piano del disco stesso.
Nell'espressione del campo sono stati utilizzati come parametri: la densità superficiale σ di carica, il raggio R del disco, la distanza *d* di un punto dell'asse di simmetria del disco dal centro del disco e la costante di Coulomb *k*[1]. L'intensità del campo in un punto B dell'asse di simmetria a distanza *d* dal disco è:

$$E_B = 2k\cdot\pi\sigma d\left[\frac{1}{d}-\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\right] \qquad (1)$$

A partire da quest'informazione risolviamo il problema sfruttando l'equilibrio meccanico del sistema.

Condizione di equilibrio meccanico

La massa *m* è soggetta a tre forze: al suo peso $m\vec{g}$, alla forza esercitata dal campo elettrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$, essendo $\vec{E}$ il valore del campo elettrico nella posizione in cui si trova la massa portatrice della carica q, e alla forza di tensione $\vec{T}$, esercitata dal filo. Le tre forze, per la configurazione del sistema [2] giacciono tutte nel piano Oxy per cui la condizione per l'equilibrio meccanico della massa consiste nell'imporre che sia nulla la somma delle suddette tre forze applicate:

$$m\vec{g} + q\vec{E} + \vec{T} = 0 \qquad (2)$$

[1] Ricordiamo che la costante di Coulomb è $k = 8{,}89\cdot10^9\ \dfrac{Nm^2}{C^2}$

[2] Si osservi che è importante sapere che il filo è agganciato nel punto A del bordo del disco, estremo avente quota maggiore del diametro del disco giacente sull'asse y.

Si deve proiettare l'equazione (2) sugli assi x ed y per ottenerne le espressioni scalari; si ricaverà un sistema di due equazioni che risolto consentirà di determinare la densità superficiale σ della carica presente sul disco.

Indichiamo con α l'ampiezza dell'angolo acuto che la direzione del filo forma con quella dell'asse x.
Sussistono le seguenti equazioni scalari:

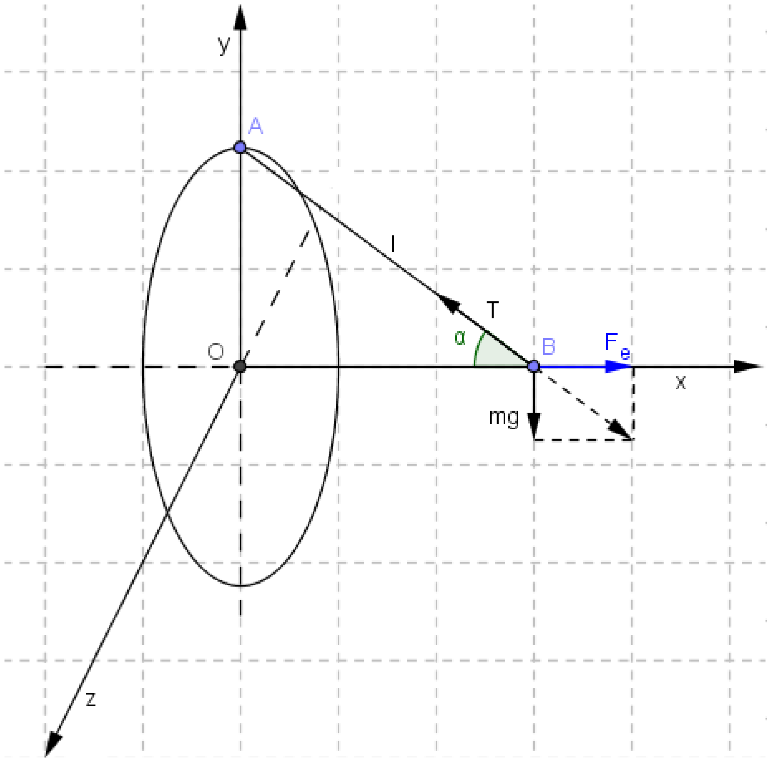
a) $T_x + F_e = 0 \quad \rightarrow -T\cos\alpha + F_e = 0$,
dalla proiezione della (2) lungo l'asse x;

b) $T_y - mg = 0 \rightarrow Tsen\alpha - mg = 0$,
dalla proiezione della (2) sull'asse y.

Si risolve il sistema formato dalle due equazioni a) e b).

$$\begin{cases} -T\cos\alpha + F_e = 0 \\ Tsen\alpha - mg = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} T = \dfrac{F_e}{\cos\alpha} \\ \dfrac{F_e}{\cos\alpha} \cdot sen\alpha - mg = 0 \end{cases} \rightarrow F_e = \frac{mg}{tg\alpha}$$



Osserviamo che con i simboli introdotti risulta $tg\alpha = \dfrac{R}{d}$ e quindi si ha

$$F_e = \frac{mg \cdot d}{R}. \qquad (3)$$

La forza elettrica F_e di cui risente la massa *m* è $F_e = qE$, con E espresso dalla (1):

$$F_e = qE = q \cdot 2k \cdot \pi\sigma d\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right] \qquad (4)$$

Uguagliando le due espressioni (3) e (4) della forza elettrica, dopo aver semplificato *d*, si ricava il valore della densità di carica superficiale:

$$\sigma = \frac{mg}{R \cdot 2\pi kq \cdot \left[\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right]} \qquad (5)$$

La carica presente sul disco vale dunque

$$Q = \pi R^2 \sigma = \frac{Rmg}{2kq \cdot \left[\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right]}$$

Sostituendo i valori noti alle grandezze si trova

$$Q = \frac{10 \cdot 10^{-2} m \cdot 2 \cdot 10^{-3} Kg \cdot 9{,}81 ms^{-2}}{2 \cdot 8{,}89 \dfrac{Nm^2}{C^2} \cdot 4 \cdot 10^{-8} C\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{10^2 + 2^2}}\right] \cdot 10^2 m^{-1}} = 6{,}86 \cdot 10^{-8} C$$