Campo elettrico

Sovrapposizione dei campi elettrici creati da due distribuzioni lineari uniformi

Problema

Due fili paralleli infinitamente estesi sono portatori di carica positiva con densità $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-4} C/m$ e sono alla distanza di *8 cm=2r*. Si consideri un piano α perpendicolare ai due fili e siano A e B i due punti in cui α interseca le rette dei due fili.

Risolvere i due quesiti seguenti.

Q_1- Su α si consideri il punto P_1 in modo che $\overline{AP_1} = \overline{BP_1}$ e $A\hat{P_1}B = 90°$. Calcolare l'intensità del campo elettrico risultante dei due campi elettrici prodotti nel punto P_1 dalle cariche sui due fili.

Q_2- Su α, sulla retta per P_1 perpendicolare ad AB, dalla parte di P_1, si consideri il punto P_2 in modo che risulti $\overline{AP_2} = \overline{BP_2} = 2 \cdot \overline{AP_1}$. Calcolare l'intensità del campo elettrico totale in P_2.

Soluzione

Premessa

Ricordiamo che il campo elettrico **E** in un punto P nel vuoto creato da una distribuzione rettilinea uniforme, infinitamente estesa, con densità λ, è inversamente proporzionale alla distanza *r* del punto P dal filo e direttamente proporzionale alla densità lineare λ di carica secondo la legge

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \qquad (1)$$

Nella legge (1) ε_0 è la costante dielettrica del vuoto il cui valore è: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$.

Per quanto concerne la direzione ed il verso del campo elettrico in P, indicato con O il punto di intersezione della retta ideale sulla quale giace il filo di carica con il piano perpendicolare alla stessa condotto per P, la direzione sarà quella della retta OP, mentre il verso sarà quello del vettore $\overrightarrow{OP}$, se λ>0, il verso opposto se λ<0.

Nel caso in cui a creare il campo siano due o più distribuzioni di carica, il campo risultante in ogni punto dello spazio è la somma vettoriale dei singoli campi creati dalle distribuzioni (principio di sovrapposizione dei campi elettrici).

Ciò premesso, affrontiamo i quesiti del problema.

Q1- In **Figura 1** è illustrata la situazione fisica con gli elementi geometrici che entrano in gioco relativamente al piano α, che deve essere pensato coincidente con quello del foglio di lavoro.

Dalle informazioni fornite sulla posizione del punto P_1 si deduce che il triangolo AP_1B è rettangolo nel vertice P_1 e quindi, con $\overline{AB} = 2r$, si ricava $\overline{AP_1} = \overline{BP_1} = r\sqrt{2}$.

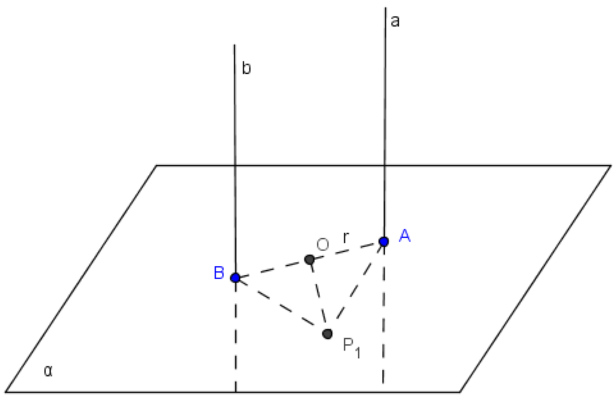

Figura 1

Per quanto riportato in premessa, i vettori $\overrightarrow{E_A}$, $\overrightarrow{E_B}$ (non riportati in figura) dei campi elettrici generati in P_1 dalle due distribuzioni di carica hanno la stessa intensità e formano un angolo di 90°. Detto O il punto medio del segmento AB, la somma dei due vettori $\overrightarrow{E_A}+\overrightarrow{E_B}$, per la simmetria della situazione, risulta essere un vettore giacente sul piano α, con direzione quella della retta OP_1 e orientato da O verso P_1, ciò perché le componenti vettoriali dei due campi parallele alla retta AB si annullano a vicenda. L'intensità del campo elettrico risultante è:

$$E_{TOT}(P_1)=2E_A(P_1)\cdot\cos 45°=2\cdot\frac{\lambda}{2\pi\cdot r\sqrt{2}\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\lambda}{2\pi\cdot r\cdot\varepsilon_0} \qquad (2)$$

Sostituendo nella (2) alle grandezze i valori noti si ricava:

$$E_{TOT}(P_1)=\frac{2{,}5\cdot 10^{-4}C\cdot m^{-1}}{2\pi\cdot 4\cdot 10^{-2}\,m\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N\cdot m^2}}=0{,}0112\cdot 10^{10}\,\frac{N}{C}\simeq 1{,}12\cdot 10^{8}\,\frac{N}{C}$$

Q2- Per la risoluzione del quesito facciamo riferimento alla **Figura 2**.
Si deve determinare il vettore campo elettrico nel punto P_2.
In figura abbiamo indicato con $\overrightarrow{E_A}$, $\overrightarrow{E_B}$ i vettori dei campi elettrici in P_2 determinati rispettivamente dalle cariche presenti sui fili (*a*, *b*).
Per determinare la somma dei due campi elettrici si devono conoscere i valori dei moduli dei singoli campi e l'ampiezza dell'angolo formato; sia 2β l'ampiezza di detto angolo.
(*Applicazione della trigonometria*)

Osserviamo che l'angolo nel vertice P_2 del triangolo AP_1P_2 misura β e poiché del triangolo sono note le misure dei due lati AP_1, AP_2 e l'angolo opposto ad AP_2, applicando il teorema dei seni possiamo determinare l'ampiezza dell'angolo β.

Osserviamo che l'angolo $A\hat{P_1}P_2$ misura 135°, perché è supplementare dell'angolo $A\hat{P_1}O$, che misura 45°.

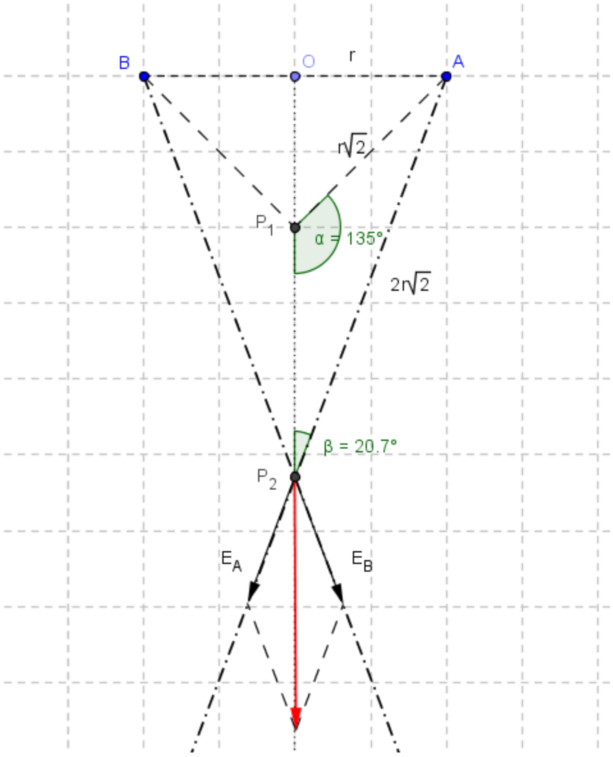

Figura 2

Si ha:

$$\frac{\overline{AP_1}}{sen\beta}=\frac{\overline{AP_2}}{sen135°}\rightarrow\ sen\beta=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_2}}sen135°=\frac{r\sqrt{2}}{2r\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

I campi elettrici generati in P_2 dalle due distribuzioni di carica hanno la stessa intensità:

$$E_A(P_2)=E_B(P_2)=\frac{\lambda}{4\pi\cdot r\sqrt{2}\cdot\varepsilon_0} \qquad (3)$$

La somma $\overrightarrow{E_A}+\overrightarrow{E_B}=\overrightarrow{E}_{TOT}$, dall'analisi della configurazione geometrica, è un vettore avente la direzione della retta OP_2, con verso da O a P_2, il cui modulo è:

$$E_{TOT}(P_2)=2E_A(P_2)\cdot\cos\beta$$

Ricordato che

$$\cos\beta=\sqrt{1-sen^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4},$$

e tenendo conto della (3), possiamo scrivere:

$$E_{TOT}\left(P_2\right) = 2 \cdot \frac{\lambda}{4\pi \cdot r\sqrt{2} \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\lambda\sqrt{7}}{8\pi \cdot r \cdot \varepsilon_0} = E_{TOT}\left(P_1\right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \simeq 7{,}41 \cdot 10^7 \, \frac{N}{C}$$