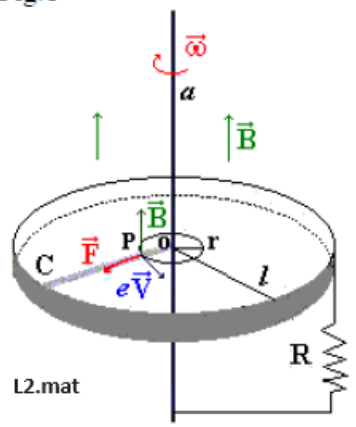
Forza elettromotrice di spostamento[1]

Problema

Una barretta di materiale conduttore di lunghezza *l*=20 cm ha un estremo a contatto con un asse pure di materiale conduttore e l'altro estremo tocca un anello conduttore. I capi di una resistenza R=100 Ω sono collegati uno all'anello e l'altro all'asse come indicato in Fig.1. Il sistema è immerso in un campo magnetico **B**=0,3 T parallelo all'asse ***a***. Si mette in rotazione la barretta intorno all'asse con velocità angolare costante ω= 50rad/s. Determinare la differenza di potenziale che si determina tra le estremità della barretta durante il moto e l'intensità della corrente che circola nel circuito.

Fig.1



Del problema presentiamo due soluzioni

Prima Soluzione

La barretta è formata di materiale conduttore e quindi possiede cariche elettriche (elettroni) debolmente legate agli atomi di appartenenza; esistono, cioè, delle cariche che si possono muovere se sono soggette ad una forza, sia pure di debole intensità. Pensiamo ad una di queste cariche. Mentre l'asticella ruota ciascuna carica è trasportata all'interno del campo magnetico B e quindi su di essa agisce la forza di Lorentz. Questa forza avrà come effetto quello di far muovere la carica.
Per descrivere quantitativamente il fenomeno che si verifica consideriamo un elettrone che si trova in un punto P a distanza **r** dal centro O di rotazione e che il verso della rotazione sia quello indicato dal vettore $\vec{\omega}$. L'espressione della forza di Lorentz è

$$\vec{F} = e\vec{V} \wedge \vec{B} \qquad (1)$$

Il campo magnetico è perpendicolare alla direzione della velocità con cui è trascinata la particella dalla barretta, il vettore $e\vec{V}$ ha la direzione della tangente nel punto P alla circonferenza di raggio OP ed il verso è quello indicato in figura poiché la carica è negativa. Dalla definizione di prodotto vettoriale segue che la forza **F** sarà orientata dal centro di rotazione verso l'anello e dunque in tale verso si muoverà l'elettrone.

L'intensità della forza **F** è $\mathbf{e^+VB}$. Possiamo determinare il lavoro compiuto da tale forza mentre la particella si muove dall'estremo O all'estremo C a contatto con l'anello. Si ha:

$$L_{O\to C} = \int_O^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^l e^+\omega r B dr = e^+\omega B\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^l \Rightarrow$$

$$L_{O\to C} = \frac{1}{2}e^+\omega B l^2$$

[1] Problema di livello universitario

Se le cariche si muovono lungo la barretta evidentemente tra gli estremi di questa si stabilisce una differenza di potenziale. Il valore di questa è dato dal lavoro compiuto sull'unità di carica e quindi

$$\Delta V = \frac{L_{O\to C}}{e^+} = \frac{1}{2}\omega B l^2 \qquad (2)$$

Osservazione

Facciamo notare che in virtù delle ipotesi fatte sul verso del campo magnetico e sul senso di rotazione la differenza di potenziale che si stabilisce è tale da far spostare un elettrone lungo la barretta dall'estremo O all'estremo C a contatto con l'anello. Ora, visto che le cariche negative in un campo elettrico risalgono le barriere di potenziale, sono quindi "risucchiate" verso i punti a potenziale maggiore, nella configurazione rappresentata in figura **l'estremo C si troverà a potenziale maggiore**. Invertendo il verso di rotazione, e mantenendo invariato il verso del campo magnetico, sarà l'estremo O della barretta a trovarsi a potenziale maggiore.

Calcolo della corrente

La differenza di potenziale che si instaura garantisce la *circolazione delle cariche elettriche* in modo continuo nel circuito secondo il verso

$$asse \to barretta \to anello \to filo\ di\ resistenza\ R$$

e l'***intensità della corrente*** che si determina è

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{B\omega l^2}{2R} = \frac{0,3T \cdot 50rad \cdot s^{-1}(0,2m)^2}{2 \cdot 100\Omega} = 3mA$$

Seconda soluzione

Questa soluzione utilizza il teorema di Faraday-Lenz sulle correnti indotte. Infatti, considerando l'area spazzata dalla barretta nella sua rotazione possiamo osservare che la barretta taglia tutte le linee di forza del campo magnetico concatenate dalla circonferenza descritta dall'estremo C e ciò avviene nel tempo necessario alla barretta per compiere un giro completo. Il periodo di rotazione è

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ebbene, in ogni intervallo di tempo di ampiezza Δt il flusso del campo magnetico attraverso il cerchio descritto dalla barretta passa dal valore massimo $\Phi_{Max} = B \cdot \pi l^2$ al valore minimo zero. In virtù della legge di Faraday-Lenz è indotta nel circuito una forza elettromotrice che provoca una corrente che tende ad impedire che ci sia variazione di flusso del campo magnetico e la sua intensità è

$$fem = \left|\frac{d\Phi(t)}{dt}\right| \simeq \frac{\Phi_{Max} - \Phi_{\min}}{\Delta t} = \frac{B\pi \cdot l^2}{\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow fem = \frac{B\omega \cdot l^2}{2} \qquad (3)$$

Come si vede il valore trovato per la forza elettromotrice è identico a quello dedotto con il primo metodo di risoluzione per la differenza di potenziale ΔV.

L2.mat