Campo elettrico di cariche puntiformi

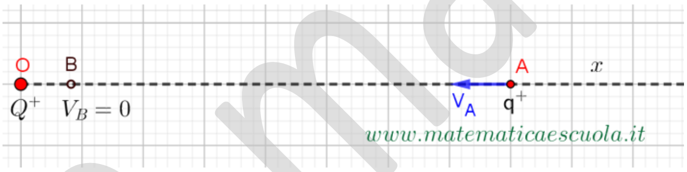
Applicazione della funzione potenziale

Problema

Nello spazio vuoto una carica positiva puntiforme Q=4,0 μC è fissa in un punto; una seconda carica positiva puntiforme q=1,2μC è trasportata da una massa m di valore $2,4\cdot10^{-5}$Kg e si muove lungo la retta congiungente le posizioni delle due cariche dirigendosi verso la prima carica e quando si trova da quella alla distanza di 40cm possiede una velocità pari a $2,0\cdot10^{2}$m/s. Stabilire la distanza minima alla quale arriverà la seconda carica dalla prima fermandosi un istante per poi invertire il suo moto.

Elaborazioni

Facciamo riferimento alla figura riportata a margine.



La carica Q è posta nel punto O, origine dell'asse orientato Ox lungo cui si muove la carica q.
Immaginiamo che q si trovi nella posizione A nell'istante in cui la sua velocità ha modulo $2,0\cdot10^{2}$m/s e si dirige verso O.

Durante il moto la carica q subisce dalla carica Q una forza repulsiva che la rallenta e questa forza è direttamente proporzionale al prodotto delle due cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza istantanea r (Legge di Coulomb).

L'intensità del campo elettrico $\vec{E}$ generato dalla carica Q nei punti a distanza r ha modulo $E=kQ/r^2$, essendo k la costante di Coulomb nel vuoto, e la forza $\vec{F}$ esercitata da Q sulla carica q è data anche dal prodotto del vettore campo elettrico nel punto occupato dalla carica q per la carica stessa: $\vec{F}=q\vec{E}$.

Il campo vettoriale elettrico è conservativo e nella regione di spazio dove ha sede è definita una funzione scalare, detta potenziale del campo elettrico, definita a meno di una costante additiva.

Nel caso del campo elettrico creato da una carica puntiforme Q posta in un punto O, in ogni punto P a distanza r da O il potenziale ha la seguente forma algebrica

$$V(P)=k\frac{Q}{r}+c \qquad (1)$$

con *c* costante additiva; pertanto nei punti della superficie sferica di centro O e raggio r il potenziale è costante[1].

Per risolvere il problema in esame scegliamo la costante *c* in modo che il potenziale sia nullo nel punto A in cui si trova la carica in moto dove è in possesso della velocità indicata $2,0\cdot10^{2}$m/s ; in conseguenza di ciò, indicata con r_A la distanza OA, dalla (1) dovrà risultare

[1] Le superfici equipotenziali per questo tipo di campo elettrico sono le superfici sferiche aventi centro nel punto occupato dalla carica.

$V(A)=k\frac{Q}{r_A}+c=0$, da cui $c=-k\frac{Q}{r_A}$

pertanto la forma algebrica del potenziale elettrico in un punto a distanza r dal O ha la seguente espressione

$$V(P)=k\frac{Q}{r}-k\frac{Q}{r_A} \qquad (2)$$

Utilizzo dell'energia

Premesse

1) Quando due cariche q_1, q_2 puntiformi sono ferme nello spazio vuoto ad una distanza r costituiscono un sistema di cariche al quale è associata la quantità di energia (elettrica) data da

$$U_{eltt.}=k\frac{q_1 q_2}{r} \qquad (3)$$

Nella formula (3) k è l costante di Coulomb e i valori delle due cariche devono essere presi rispettando il segno delle stesse. Il valore dell'energia elettrica associata ad un sistema di cariche è pari al lavoro che un agente esterno ha dovuto compiere per mettere insieme le cariche nella configurazione in cui le stesse si trovano supponendo che inizialmente le diverse cariche fossero a distanza reciproca infinita.

2) Quando si conosce l'espressione della funzione potenziale V associata ad una particolare distribuzione di carica elettrica, allorché si presenti nello spazio fisico un'altra carica q in un determinato punto P, il valore dell'energia elettrica del sistema complessivo di cariche sarà pari al prodotto del potenziale nel punto P per l'intensità della carica q, quindi

$$U_{eltt.}=V(P)\cdot q \qquad (4)$$

Se la carica q si muove ed ha in P velocità $\vec{v_P}$ ed è trasportata da una massa *m* l'energia complessiva del sistema di cariche sarà la somma dell'energia elettrica e dell'energia cinetica della massa carica:

$$E_{tot.}=U_{eltt.}+E_{cinet.} \qquad (5)$$

3) Se non intervengono sul sistema di cariche altre forze oltre quelle elettriche l'energia totale si conserva.

Tutto ciò premesso osserviamo che nell'istante in cui la carica q si trova in A l'energia totale del sistema è:

$$E_{tot.}(A)=V(A)\cdot q+\frac{1}{2}m(v_A)^2=\left(k\frac{Q}{r_A}-k\frac{Q}{r_A}\right)\cdot q+\frac{1}{2}m(v_A)^2=\frac{1}{2}m(v_A)^2 \qquad (6)$$

Nell'istante in cui la carica **q** si fermerà nella posizione B di minima distanza da Q l'energia totale del sistema di cariche sarà pari solo al prodotto del potenziale in quel punto per la carica q

$$E_{tot.}(B)=V(B)\cdot q=\left(k\frac{Q}{r_B}-k\frac{Q}{r_A}\right)\cdot q=kQq\cdot\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \qquad (7)$$

Uguagliando i valori dell'energia totale espressi nelle (6) e (7) (perché l'energia totale del sistema si conserva nelle diverse posizioni in cui si troverà la carica q) si ricava

$$kQq\cdot\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)=\frac{1}{2}m\left(v_A\right)^2\text{, da cui}\quad \frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}=\frac{mv_A^2}{2kQq}\qquad(8)$$

Sostituendo nella (8) i valori alle grandezze note si determina il valore della distanza minima r_B. Si ha:

$$\frac{1}{r_B}=\frac{1}{r_A}+\frac{mv_A^2}{2kQq}=\frac{1}{0,40m}+\frac{2,4\cdot10^{-5}Kg\cdot\left(2,0\cdot10^2ms^{-1}\right)^2}{2\cdot9\cdot10^9\left(N\cdot m^2\cdot C^{-2}\right)\cdot4\cdot10^{-6}C\cdot1,2\cdot10^{-6}C}=\frac{1}{0,40m}++\frac{2,4\cdot4\cdot10^{-1}Kg\cdot m^2s^{-2}}{86,4\cdot10^{-3}\left(N\cdot m^2\right)}=13,61m^{-1}$$

e quindi

$$r_B=\frac{1}{13,61}m\simeq7,34cm$$

Conclusione

La carica q, nelle ipotesi espresse nel testo del problema, si arresta per un istante a circa 7,34cm dalla carica Q, per poi ripartire nel verso opposto.