Campo elettrico creato da una distribuzione sferica omogenea

Moto oscillatorio di una carica elettrica[1]

Problema

In una sfera di raggio R=0,80m è uniformemente distribuita una carica negativa Q=-0,50μC . La sfera presenta un foro diametrale che l'attraversa completamente il cui volume è trascurabile rispetto a quello della sfera.

Quesito 1

Determinare l'espressione del campo elettrico creato dalla distribuzione della carica Q in tutto lo spazio.

Quesito 2

Ad una delle due estremità del foro si lascia libera una massa puntiforme di 0,5 grammi sulla cui superficie è distribuita una carica positiva q=3,5mC. Le dimensioni della massa sono tali che la stessa può passare liberamente attraverso il foro praticato nella sfera. Determinare il tipo di moto cui sarà soggetta la massa carica una volta lasciata libera.

Supporre che il sistema in esame sia immerso nello spazio vuoto.

Elaborazioni

Quesito 1 - Strategia risolutiva

L'intensità del campo elettrico si determina applicando opportunamente il teorema di Gauss sul flusso del campo elettrico generato dalla carica Q. Infatti, data la simmetria sferica della distribuzione di carica negativa, **il campo elettrico in ogni punto P dello spazio è radiale entrante e diretto verso il centro O della sfera**. Scegliendo come superficie gaussiana la superficie sferica avente lo stesso centro O e raggio OP, si calcola il flusso del campo **E** attraverso di essa e, uguagliato al rapporto tra la carica racchiusa dalla superficie e la costante dielettrica del vuoto, si determina l'intensità del campo elettrico.

Vedremo che l'**espressione dell'intensità del campo elettrico in** un punto **P** distante r dal centro O della sfera di raggio R è:

$$E\ r\ = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & per \quad 0 \le r \le R \\ \dfrac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & per \quad r > R \end{cases},$$

dove ρ è il modulo della densità volumetrica di carica nel volume della sfera carica.

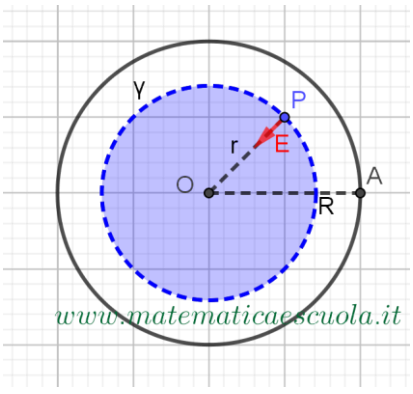

Figura 1

Primo caso: 0≤r≤R

Facciamo riferimento alla Figura 1 in cui è rappresentata la sezione γ della sfera contenente la carica Q con il piano del foglio. Sia P un punto interno alla sfera di centro O e raggio R; poniamo OP=r. Ricordiamo che la carica presente esternamente alla sfera di raggio OP, nell'ipotesi fatta di distribuzione sferica uniforme della carica, genera in P un campo elettrico nullo[2], pertanto il campo elettrico in P sarà solo quello dovuto alla carica interna alla sfera di raggio OP.

[1] Il lavoro completo sarà inserito in una raccolta specifica di problemi sull'elettromagnetismo che sarà disponibile a richiesta degli utenti previa transazione.

[2] Questa proprietà del particolare campo elettrico generato da una distribuzione di carica omogenea con simmetria sferica si dimostra rigorosamente, ma qui la assumiamo come vera rinviando ad un qualsiasi testo teorico per la dimostrazione analitica.

Per la descrizione del campo definiamo la **densità volumetrica di carica**, che,…

Applicazione del teorema di Gauss

Sia Σ la superficie della sfera di centro O e raggio $r = OP$. Applicando la definizione di flusso del campo elettrico attraverso una superficie, e considerata la caratteristica del campo in questione, **il flusso**[3] del campo elettrico creato dalla carica contenuta nella sfera di raggio OP attraverso la superficie Σ è

$$\Phi_{\Sigma}\left(\vec{E}\right) = -E \cdot 4\pi r^2 \qquad (3)$$

D'altra parte, per il teorema di Gauss il valore algebrico del flusso in questione è anche uguale al rapporto tra il valore della carica racchiusa nella superficie Σ e la costante dielettrica del mezzo. Poiché il mezzo è il vuoto detto valore è:

$$\Phi_{\Sigma}\left(\vec{E}\right) = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

e quindi per la (2) si ha

…

Secondo caso: r>R

Per i punti P esterni alla sfera di raggio R, indicata con r la distanza di P dal centro della sfera, la distribuzione sferica della carica determina un campo che ha le stesse caratteristiche di quello creato da una carica uguale a tutta la carica Q distribuita nella sfera in questione ma concentrata nel centro della sfera, quindi …

Quesito 2

Premessa

Poiché la sfera presenta un foro diametrale il cui volume è trascurabile rispetto al volume dell'intera sfera si deduce che la quantità di carica immagazzinata nel corrispondente volume del foro nel caso della sfera piena, data la distribuzione di carica uniforme, è trascurabile rispetto alla carica distribuita nella restante parte del volume della sfera. Questa considerazione implica che nello studio del fenomeno che ci accingiamo a trattare possiamo ritenere che il campo elettrico generato dalla carica Q, distribuita nel volume della sfera dalla quale è stato sottratto lo spazio fisico occupato dal foro, abbia nello spazio corrispondente al volume del foro le stesse caratteristiche descritte nella trattazione del precedente quesito 1. Dunque in ogni punto del foro a distanza r, con 0≤ r<R, il campo elettrico $\vec{E}$ è radiale entrante verso il centro O della sfera ed ha modulo

---

[3] **Nota teorica importante**

Si badi che il **flusso del campo elettrico attraverso una superficie piana,** nei cui punti il campo elettrico è costante, è il risultato del prodotto scalare tra il vettore campo elettrico ed il vettore rappresentante la superficie; il risultato dipende, oltre che dai valori dei moduli dei due vettori, anche dall'angolo che questi formano: il valore può essere positivo, negativo o nullo. Nel caso in esame, per poter applicare la definizione di flusso del campo elettrico attraverso la superficie Σ della sfera, considerato che Σ è curva, la si deve pensare come suddivisa in infinite areole, che devono essere approssimativamente piane, di ciascuna delle quali l'area sia S_i e alla quale sarà associato il vettore $\vec{S_i}$, avente modulo S_i, perpendicolare alla superficie dell'areola e diretto verso l'esterno della sfera Σ. Il vettore campo elettrico definito nei punti dell'areola sarà $\vec{E_i}$,…

Studio L2.mat

$$E = \frac{|\rho| r}{3\varepsilon_0} \qquad (8)$$

Prosecuzione della trattazione del quesito 2

Sulla carica puntiforme q positiva, in qualunque posizione all'interno del foro si troverà, il campo elettrico eserciterà la forza $\vec{F} = q\vec{E}$ che avrà la stessa direzione e lo stesso verso del campo elettrico presente in quel punto, quindi …

A questo punto **è d'obbligo precisare che** se l'esperimento fisico avviene in un punto qualsiasi della superficie del Pianeta Terra, evidentemente **sulla massa m portatrice della carica q si esercita anche la forza peso** $m\vec{g}$, dove $|\vec{g}| = g \simeq 9{,}81 ms^{-2}$ è l'accelerazione di gravità, per cui ai fini dello studio del moto della massa carica q quando questa si muove nel tunnel, poiché la seconda legge della dinamica afferma che "la risultante delle forze agenti sulla massa m (qui assunta come puntiforme) è uguale al prodotto della massa per l'accelerazione subita dalla particella" si dovrebbe considerare anche il contributo al moto dovuto alla forza peso.

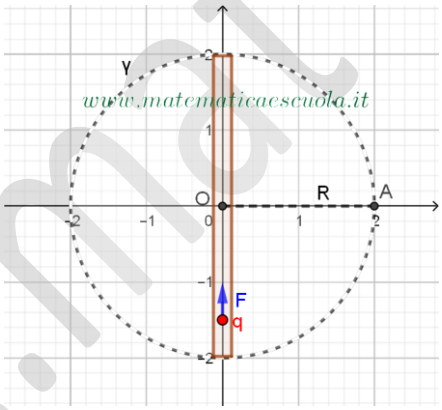

Figura 4

Ebbene, faremo vedere più avanti[4] che **l'intensità della forza peso confrontata con l'intensità della forza elettrica è sostanzialmente trascurabile**, quindi in questa trattazione non consideriamo come attiva la forza peso e **dunque assumeremo che la massa m sia sottoposta all'azione della sola forza elettrica** e scriveremo la seconda legge della dinamica nella seguente forma

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}\,; \qquad (10)$$

Ancora, visto che …

Dalla (10) si ottiene l'espressione per l'accelerazione istantanea della massa m

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \qquad (10.1)$$

Il vettore accelerazione e il vettore campo elettrico sono paralleli e concordi perché q>0 per ipotesi, quindi in ogni posizione occupata dalla massa carica la sua accelerazione punta verso il centro O della sfera (O è il punto attrattore).

Per descrivere il moto e avere la possibilità di esplicitare le leggi fisiche fissiamo un asse y orientato avente la stessa direzione del tunnel e con l'origine coincidente con il centro O della sfera.

Indicando con y(t) l'ordinata della massa puntiforme nel tunnel risulta $|y(t)| = r$, quindi la distanza r della posizione occupata dalla massa dal centro O sarà y(t), quando y>0 e -y(t) quando y(t)<0:

…

*** ***

[4] Per il confronto tra le intensità delle due forze riferirsi al successivo paragrafo <<Confronto tra le intensità della forza elettrica e della forza peso agenti sulla massa>>.

Studio L2.mat

Confronto tra le intensità della forza elettrica e della forza peso agenti sulla massa

Determiniamo le intensità della forza elettrica agente sulla massa carica quando questa si trova ad un estremo del tunnel e quella della forza peso con i dati forniti per le grandezze.

…

Rapporto tra le intensità delle due forze:

$$\frac{F_{el.}}{p} = \frac{19,670N}{4,905\cdot 10^{-3}N} \simeq 4000$$

Con i dati forniti nel problema risolto l'intensità della forza elettrica agente sulla carica è pari a circa 4000 volte quella della forza peso; ciò giustifica l'aver trascurato gli effetti che avrebbe potuto provocare sul moto la forza peso. Pertanto, rigorosamente, dobbiamo concludere che il moto della particella puntiforme è oscillatorio intorno al centro della sfera ma non perfettamente armonico.

Studio L2.mat