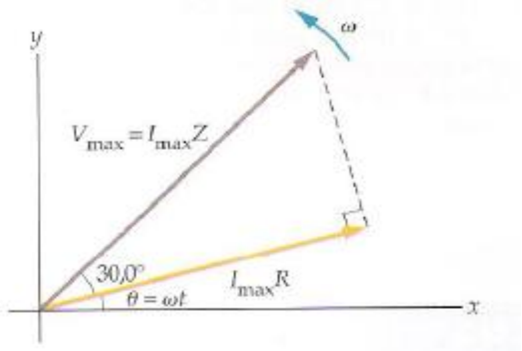
Sui Circuiti RLC

Problema[1] - La figura mostra il diagramma dei fasori di un circuito RLC.

a) Sapendo che la resistenza in questo circuito vale 525 Ω, quanto vale l'impedenza?
b) Se si aumenta la frequenza del circuito l'impedenza aumenta, diminuisce o rimane la stessa? Giustifica la tua risposta.



Elaborazioni

a) Dalla figura si evince che il fasore della tensione massima è in anticipo di 30° rispetto al fasore della tensione ai capi della resistenza. L'angolo indicato rappresenta lo sfasamento e il suo coseno rappresenta il fattore di potenza del circuito. Ricordato che risulta cos(Φ)=R/Z, conoscendo la resistenza R=525Ω si può determinare l'impedenza. Risulta:

Z=R/cos(30°)=525(Ω)/cos(30°)≈ 606Ω.

b) La frequenza del circuito è $f = \frac{\omega}{2\pi}$, quindi $\omega = 2\pi \cdot f$. Se si aumenta la frequenza del circuito aumenta conseguentemente la pulsazione ω. Poiché l'espressione dell'impedenza è

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

vogliamo studiare il comportamento dell'impedenza in corrispondenza ad un aumento di ω, mantenendo costanti i valori delle altre grandezze R, L, C. Per rispondere al quesito occorre studiare la derivata prima della funzione Z(ω). Si ha:

$$Z'(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \left[2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cdot\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cdot\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)$$

Osserviamo che dei tre fattori che compongono la derivata prima due sono certamente positivi mentre il terzo, $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ varia al variare di ω, quindi al variare della frequenza.

---

[1] Problema riportato come n.78 a pag 1009 del Corso di Fisica, Volume 3 Elettromagnetismo Fisica atomica e subatomica, autore Walker, Editore **linx;** anche **l**'immagine riportata è contenuta sul testo indicato a corredo del testo del problema.

Per il circuito in esame non conosciamo il segno della grandezza $\left(\omega \mathrm{L}-\frac{1}{\omega C}\right)$; dai dati disponibili possiamo solo dedurre il modulo di questa. Infatti risultando

$\left(\omega \mathrm{L}-\frac{1}{\omega C}\right)^2 = Z^2 - R^2 = \left(606^2 - 505^2\right)\Omega^2 = 112211\Omega^2$, deduciamo che $\left|\omega \mathrm{L}-\frac{1}{\omega C}\right| = \sqrt{112211\Omega^2} \approx 335\Omega$.

Ebbene, per rispondere al quesito dobbiamo distinguere i due seguenti casi.

Primo caso- Se $\omega \mathrm{L}-\frac{1}{\omega C} > 0$, allora la derivata prima della funzione Z(ω) è positiva e quindi la funzione stessa è strettamente crescente, perciò ad un aumento della frequenza corrisponde un aumento di ω e quindi un aumento dell'impedenza del circuito.

Secondo caso - Se $\omega \mathrm{L}-\frac{1}{\omega C} < 0$ la derivata prima è negativa, quindi la funzione Z(ω) è strettamente decrescente e ad un aumento di ω, e dunque ad un aumento della frequenza, corrisponde una diminuzione dell'impedenza.