CAMPO MAGNETICO CREATO DA UNA SPIRA CIRCOLARE

Premessa

Definizione

Per **spira** s'intende un qualsiasi filo conduttore chiuso privo di nodi.

In elettromagnetismo si considerano spire circolari e spire rettangolari che consentono di esprimere concetti e proprietà relativi al campo magnetico per i quali la spiegazione dal punto di vista matematico è abbastanza accessibile in virtù della simmetria delle figure.

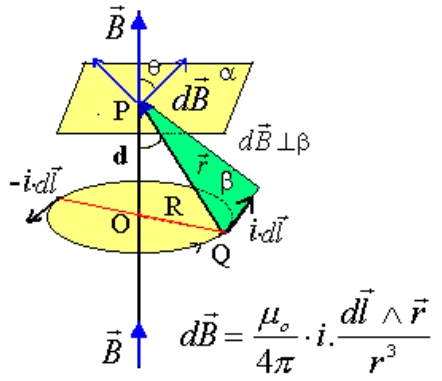
In particolare si considerano spire che sottoposte all'azione delle forze del campo magnetico risultano indeformabili, quindi in sostanza rigide ai fini degli scopi prefissati.

Se una spira circolare piana di raggio R è percorsa da corrente di intensità *i* ed è immersa nel vuoto, allora

- il campo magnetico $\vec{B}_o$ creato dalla corrente nel centro della spira è perpendicolare al piano della spira, orientato in modo tale che un osservatore collocandosi con i piedi nel centro della spira e con la testa disposta secondo la direzione del campo $\vec{B}_o$ vedrebbe la corrente circolare nella spira in senso antiorario.
  L'intensità del campo è data da

$$B_o = \frac{\mu_o i}{2R} \qquad (1)$$

Fig.1
Campo magnetico di una spira



- Se si considera l'asse della spira, cioè la retta perpendicolare al piano della spira e passante per il centro della stessa, in un punto P che si trovi a distanza **d** dal piano della spira il campo magnetico prodotto dalla corrente circolante nella spira
  -ha ancora la direzione dell'asse, come si dimostra con semplici considerazioni geometriche legate alla simmetria della configurazione;
  - ha il verso coincidente con quello del campo nel centro della spira;
  - il suo modulo è

$$B_{oP} = \frac{\mu_o i R^2}{2d^3} \qquad (2)$$

Momento elettromagnetico di una spira circolare

Ad ogni spira rigida percorsa da corrente ***i*** ed immersa in un campo magnetico si associa una grandezza detta momento elettromagnetico indicato con m_s . Per una spira circolare di raggio R percorsa dalla corrente di intensità ***i*** il momento elettromagnetico è dato da

$$m_s = iS = i\pi R^2 \qquad (3)$$

Si può esprimere l'intensità del campo magnetico in un punto dell'asse della spira in funzione del momento elettromagnetico e della distanza del punto dal piano della spira. Ovvero si può dare una forma analitica diversa alla formula (2)

$$B_{oP} = \frac{\mu_o i R^2}{2d^3} = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{m_s}{d^3} \qquad (2.1)$$

Sussiste il seguente

Teorema d'equivalenza di Ampere

Una spira circolare percorsa da corrente ed un ago magnetico (dipolo magnetico) se hanno uguale momento elettromagnetico creano lo stesso campo magnetico ed immersi in un campo magnetico hanno lo stesso comportamento

$$m_{spira} = m_{ago}$$

Scheda di Approfondimento

Dimostrazione della formula per il campo magnetico prodotto dalla corrente circolante in una spira circolare.

Si consideri un elemento di corrente $i \cdot d\vec{l}$ in corrispondenza al punto Q e sia P in punto sull'asse della spira individuato dal vettore di posizione $\vec{r}$. Dalla prima formula di Laplace il campo magnetico creato in P dall'elemento di corrente è dato da

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot i. \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \qquad (3)$$

che è perpendicolare al piano β individuato dai due vettori $i \cdot d\vec{l}$, $\vec{r}$.
Se consideriamo il piano α passante per P e perpendicolare all'asse della spira possiamo dimostrare che il campo magnetico generato dalla spira nel punto P non ha componente rispetto ad α , precisamente è perpendicolare a questo.

Infatti, per ogni elemento di corrente considerato sulla spira ne esiste un altro ad esso opposto il cui contributo annulla la componente del primo lungo il piano α . In Fig.1 abbiamo rappresentato i due elementi di corrente $i \cdot d\vec{l}$, $-i \cdot d\vec{l}$ che sono applicati ai due estremi di uno stesso diametro della spira. Da semplici considerazioni geometriche legate alla simmetria della figura si evince che i due elementi di corrente generano nel punto P due campi magnetici elementari le cui proiezioni sul piano α sono due vettori opposti. Pertanto la somma dei loro contributi è un vettore avente la direzione dell'asse della spira, verso quello indicato in figura e modulo il doppio del modulo della componente del vettore $d\vec{B}$ lungo il suddetto asse.

Avendo indicato con θ l'angolo formato dal vettore $d\vec{B}$ con il verso positivo dell'asse della spira, il modulo della componente di $d\vec{B}$ lungo l'asse è dato da

$$\left|d\vec{B}\right| \cdot \cos\theta \qquad (4)$$

Ai fini del calcolo del modulo del campo magnetico nel punto P possiamo allora pensare di suddividere la spira in tanti elementi di corrente ciascuno dei quali contribuirà con i campi elementari $d\vec{B}_k$. Ciascuno di questi vettori forma con l'asse della spira lo stesso angolo θ, quindi il modulo del campo magnetico complessivo lo possiamo determinare sommando i singoli contributi . L'operazione da eseguire è il calcolo di un integrale definito, detto di linea espresso da:

$$B_{oP} = \oint_{\Gamma} dB \cdot \cos\theta = \oint_{\Gamma} \left| \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right| \cdot \cos\theta \qquad (5)$$

Facciamo notare ora che i vettori $\vec{r}$ e $d\vec{l}$ per il teorema delle tre perpendicolari risultano tra loro perpendicolari perciò il loro prodotto vettoriale ha per modulo il prodotto dei moduli.

$$\left|d\vec{l} \wedge \vec{r}\right| = dl \cdot r \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = dl \cdot r \qquad (6)$$

quindi la (5) diventa

$$B_{oP} = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \left| \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right| \cdot cos\,\theta = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r}{r^3} \cdot cos\,\theta = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot cos\,\theta}{r^2}$$

(5.1)

A questo punto l'integrale si può calcolare . Si trasportano fuori dal segno di integrale tutti i fattori costanti e rimane

$$B_{oP} = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot \oint_{\Gamma} dl = \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot 2\pi R \qquad (5.2)$$

L'espressione ottenuta si può modificare perché dal triangolo rettangolo QOP si ricava

$$r = \frac{R}{sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{R}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{R}{r},$$

quindi si ha

$$B_{oP} = \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_o i \cdot R^2}{2r^3} \qquad (7)$$

La (7) esprime il valore del modulo del campo magnetico nel punto P.
Osserviamo che per i punti P situati sull'asse della spira ed abbastanza lontani dal piano di questa , ovvero per punti la cui distanza è molto maggiore del raggio della spira, la misura del modulo del raggio vettore di posizione $\vec{r}$ si può sostituire con la misura della distanza **d** dei punti P dal piano contenente la spira, per cui la formula (7) si può scrivere facendo comparire **d** in luogo di r.

$$B_{oP} = \frac{\mu_o i \cdot R^2}{2d^3} \qquad (7.1)$$

Campo magnetico nel centro di una spira circolare

Nel centro della spira si ha r=R e quindi la formula (7) fornisce il valore

$$B_{oP} = \frac{\mu_o i \cdot R^2}{2r^3} = \frac{\mu_o i \cdot R^2}{2R^3} = \frac{\mu_o i}{2R} \qquad (8)$$