

Induzione e Forza elettromotrice indotta

Solenoidi e Bobine (con note teoriche)

Problema_1 - Una bobina rettangolare di dimensioni 20cmx30cm è formata da 150 avvolgimenti e il massimo valore della forza elettromotrice prodotta quando ruota con velocità angolare di 180rad/s in un campo magnetico uniforme B è 60V. Calcolare l'intensità del campo magnetico B.

Elaborazioni

Dati

N=150 avvolgimenti

Area della sezione della bobina: $A=0,20 \times 0,30 \text{ m}^2 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$

Velocità angolare $\omega = 180 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; $f_{em_Max} = 60 \text{ V}$

Ricordiamo che se la bobina ruota di moto circolare uniforme con velocità angolare ω , l'angolo descritto in t secondi dalla normale al piano di ciascuna sua spira (avvolgimento) con la direzione del campo magnetico è $\theta = \omega t + \theta_0$. Il flusso del campo magnetico B attraverso una spira della bobina è

$$\Phi(\vec{B}) = B \cdot A \cdot \cos(\omega t + \theta_0).$$

La forza elettromotrice indotta nella bobina è oscillante e se la bobina ha N avvolgimenti la legge oraria è

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(NB \cdot A \cdot \cos(\omega t + \theta_0)) = NB \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \theta_0)$$

Il valore massimo della forza elettromotrice si ha negli istanti t in cui risulta $\omega t + \theta_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi per

$$t = \frac{\pi}{2\omega}(2k+1) - \frac{\theta_0}{\omega}, \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ e il modulo è } f_{em_Max} = NB \cdot A \cdot \omega.$$

Dai dati forniti emerge che

$$NB \cdot A \cdot \omega = 60 \text{ V} \rightarrow B = \frac{60 \text{ V}}{N \cdot A \cdot \omega} = \frac{60 \text{ V}}{150 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot 180 \text{ rad s}^{-1}} = 37 \text{ mT}$$

*** **

Problema_2 - Un filo metallico di lunghezza 3,1m è avvolto a forma di bobina circolare con raggio 5cm.

Q₁- Si fa ruotare in modo uniforme la bobina in un campo magnetico B=0,05T facendole compiere 250 giri al minuto. Determinare il massimo valore della forza elettromotrice indotta.

Q₂- Se il filo viene avvolto formando una bobina di raggio 10cm e questa ruota con la velocità angolare indicata sopra nello stesso campo magnetico B quanto vale il valore massimo della forza elettromotrice indotta?

Elaborazioni

Dati

Lunghezza del filo: $l=3,1m$

Raggio della bobina: $r=5cm$

Area di una sezione normale della bobina: $A=\pi r^2 = 25\pi \cdot 10^{-4} m^2$

Velocità angolare $\omega = 250 \frac{giri}{min} = 250 \cdot 2\pi \frac{rad}{60s} = 21,17 \frac{rad}{s}$

Calcolare f_{em_Max}

Q₁- Numero di avvolgimenti della bobina: $N = \frac{lungh_filo}{2\pi r} = \frac{3,1m}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}m} \simeq 10$

Il valore massimo della forza elettromotrice indotta nella bobina è

$$f_{em_Max} = NB \cdot A \cdot \omega = 10 \cdot 0,05T \cdot 25\pi \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 21,17 \frac{rad}{s} = 8,3 \cdot 10^{-2} V$$

Q₂- Se il raggio degli avvolgimenti raddoppia allora dimezza il numero degli avvolgimenti ma l'area racchiusa da ogni spira quadruplica. Con ovvio significato dei simboli si ha

$$f_{em_Max} = N_2 B \cdot A_2 \cdot \omega = \frac{N}{2} B \cdot 4A \cdot \omega = 2NB \cdot A \cdot \omega \simeq 0,17V$$

Il valore massimo della f_{em} raddoppia.

*** **

Problema_3- Calcolare l'induttanza di un solenoide contenente 500 avvolgimenti, di lunghezza 25cm, sapendo che la sua sezione normale ha raggio 3,5cm.

Elaborazioni

Indicando con N il numero degli avvolgimenti del solenoide, con A l'area della sua sezione normale, l la lunghezza dello stesso, la sua induttanza è

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A, \text{ essendo } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Tm / A \text{ la costante di permeabilità magnetica del vuoto.}$$

Il valore richiesto per l'induttanza è

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A} \cdot \frac{500^2}{0,25m} \cdot \pi (3,5 \cdot 10^{-2} m)^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot 3,5^2 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^{-2}} H = 19 \cdot 10^{-9} H$$

*** **

Problema_4 - Un solenoide lungo 24cm ha 500 avvolgimenti e la sua induttanza è 8,0mH.

Q₁- Calcolare l'area di una sezione normale del solenoide.

Q₂- Nell'ipotesi che il solenoide sia percorso da una corrente $I=4,0A$ e che questa si azzeri in 50ms, determinare la forza elettromotrice indotta.

Elaborazioni

Q₁- Essendo $N=500$ il numero degli avvolgimenti, con A area della sezione normale, dalla formula per

l'induttanza $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$ ricaviamo

$$A = \frac{L \cdot l}{\mu_0 \cdot N^2} = \frac{8,0 \cdot 10^{-3} H \cdot 0,24 m}{4\pi \cdot 10^{-7} Tm \cdot A^{-1} \cdot 500^2} = 0,0061 m^2 = 61 cm^2$$

Q₂- Il valore medio della forza elettromotrice indotta è dato dal rapporto tra la variazione del flusso del campo magnetico prodotto dalla corrente che circola nel solenoide stesso e la misura dell'intervallo di tempo in cui ciò si verifica. In simboli

$$f_{em} = \left| \frac{\Delta \Phi(\vec{B})}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Phi_{fin.} - \Phi_{iniz.}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{0 - \Phi_{iniz.}}{\Delta t} \right| = \frac{\Phi_{iniz.}}{\Delta t} = \frac{B_{iniz.} \cdot N \cdot A}{\Delta t}$$

Ricordiamo che la corrente I crea nello spazio interno al solenoide un campo magnetico uniforme di intensità $B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l}$, quindi, poiché $\Delta t = 50 \cdot 10^{-3} s$ risulta

$$f_{em} = \frac{B_{iniz.} \cdot N \cdot A}{\Delta t} = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l \cdot \Delta t} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A} \cdot 4,0 A \cdot \frac{500^2 \cdot 61 \cdot 10^{-4} m^2}{24 cm \cdot 50 \cdot 10^{-3} s} = \frac{4\pi \cdot 4 \cdot 25 \cdot 61 \cdot 10^{-7}}{120 \cdot 10^{-4}} V = 639 mV$$

*** **

Problema_5 – (Circuito RL) Un circuito RL contiene la resistenza $R=150\Omega$ e un'induttanza $L=65mH$.

Q₁- Determinare la costante di tempo propria del circuito.

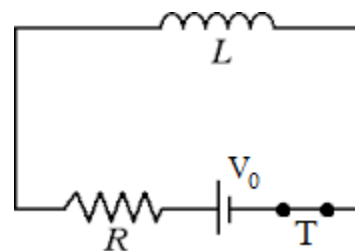
Q₂- Determinare dopo quanto tempo dalla chiusura del circuito la corrente circolante raggiunge il valore pari al 50% del “valore finale” e l'istante in cui il valore diventa pari al 95% di quello finale.

Q₃- Una volta che il circuito è giunto a “regime” si decide di aprire l'interruttore. Scrivere la legge oraria della corrente che circola nel circuito, precisandone il valore iniziale e dopo quanto tempo dall'apertura dell'interruttore il valore si riduce all'1% del valore iniziale.

Elaborazioni

Premessa

Sia V_0 la forza elettromotrice del generatore che alimenta il circuito. Posto $t=0s$ l'istante in cui si chiude l'interruttore la legge oraria della corrente che circola è



$$I(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (\text{legge della corrente a circuito chiuso})$$

Osservazione importante (sul concetto di “valore finale” della corrente)

L’espressione analitica della legge oraria indica che il valore istantaneo della corrente circolante nel circuito aumenta continuamente senza mai raggiungere alcun valore massimo, pertanto la locuzione usata “valore finale” per la corrente non è propriamente corretta. **La funzione $I(t)$ ha come stremo superiore** il valore del seguente limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{V_0}{R}$$

e al valore di detto limite ci si riferisce nella prassi quando si considera il “valore finale” della corrente.

Q₁- Ricordiamo che la **costante di tempo** propria di un circuito RL è definita da $\tau = \frac{L}{R}$ e in questo caso vale

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{65 \cdot 10^{-3} H}{150 \Omega} \simeq 4,33 \cdot 10^{-4} s$$

Q₂- Precisato il concetto di “valore finale” della corrente come in premessa, alla prima richiesta si risponde risolvendo la seguente equazione

$$I(t) = 50\% \frac{V_0}{R}, \text{ nell'incognita } t, \text{ quindi}$$

$$\frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = 50\% \frac{V_0}{R}, \text{ da cui } 1 - e^{-\frac{R}{L}t} = 0,5 \rightarrow e^{-\frac{R}{L}t} = 0,5 \rightarrow -\frac{R}{L}t = \ln(0,5) \rightarrow$$

$$t = -\frac{L}{R} \ln(0,5) = -\frac{65 \cdot 10^{-3} H}{150 \Omega} \ln(0,5) \simeq 0,300 ms.$$

Operando analogamente a quanto fatto per risolvere la prima parte del quesito, risolvendo l’equazione

$$\frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = 95\% \frac{V_0}{R},$$

si ottiene l’istante in cui si verifica il valore richiesto per la corrente. Eseguendo i calcoli si ottiene

$$e^{-\frac{R}{L}t} = 0,05 \rightarrow t = -\frac{L}{R} \ln(0,05) \simeq 1,297 ms$$

Q₃- (Apertura del circuito RL) Quando il circuito è “va a regime” nello stesso circola la corrente

$$I_{\lim} = \frac{V_0}{R}$$

Ponendo $t=0s$ l’istante in cui si apre il l’interruttore la legge oraria della corrente che circola subito dopo è

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (\text{legge della corrente a circuito aperto}),$$

che si può anche scrivere in modo da far comparire la costante τ di tempo

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Il valore iniziale della corrente è $I_0 = \frac{V_0}{R}$.

Per determinare l'istante in cui la corrente si ridurrà all'1% del valore iniziale si deve risolvere la seguente equazione nell'incognita t

$$\frac{V_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = 1\% \frac{V_0}{R} \rightarrow e^{-\frac{R}{L}t} = 0,01 \rightarrow t = -\frac{L}{R} \ln(0,01) = -\tau \ln(0,01) \simeq -4,33 \cdot 10^{-4} \text{ s} \cdot (-4,605) = 1,994 \text{ ms}$$