

Un problema di Dinamica

(posto da un utente della rete)

Testo del quesito⁽¹⁾

*Gentili professori, gentilmente vorrei sapere come si fa a calcolare la **forza d'urto** di un corpo che cade da un'altezza di 15 metri dal suolo, che partendo da velocità a zero e del peso di 8 Kg, arriva a toccare il suolo con velocità di un grave che equivale alla radice quadrata di $2gH$.*

Aspettando una Vostra sicura risposta Vi invio i più cordiali saluti.

Alfonso De Meis. Pavia

Risposta

Il problema che Lei pone rientra nella parte della meccanica che si occupa dello studio degli urti.

Un urto è definito come un'azione che si esercita tra due corpi diversi che ha durata brevissima.

Esempi

- Un calciatore calcia un pallone da fermo o ribatte un pallone al volo.
- Un giocatore da golf sferra una forza con la mazza per lanciare la pallina.
- Un giocatore da tennis effettua la battuta o risponde alla battuta del giocatore avversario colpendo la pallina.
- Un giocatore da biliardo lancia una palla verso un'altra (che può avere o meno le stesse dimensioni). La prima palla colpisce la seconda e nell'impatto, di breve durata, ciascuna delle due palle subisce una variazione della velocità.
- Ecc...

Poiché in un urto tra due corpi A, B, si registrano variazioni di velocità, evidentemente ci sono delle accelerazioni e per la seconda legge della dinamica queste devono essere state causate da delle forze. Se il sistema dei due corpi che si urtano è isolato allora si mantiene costante la quantità di moto complessiva dei due corpi (principio di conservazione della quantità di moto). Fra i corpi A e B che interagiscono formando sistema isolato, istante per istante il corpo A esercita su B una forza opposta a quella che B esercita su A. Le forze si manifestano a coppia. Si tenga ancora presente che per quanto breve sia l'urto, comunque esso ha una durata finita e l'entità di tale durata è fondamentale per poter valutare le grandezze in gioco.

Concetto di impulso di una forza

Se una forza \vec{F} agisce per Δt secondi, si chiama impulso della forza il vettore $\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$. Ebbene, se la forza nell'intervallo di tempo considerato è stata esercitata su un corpo C di massa m , dette \vec{V}_i , la velocità posseduta dal corpo C nell'istante in cui è iniziata l'azione della forza \vec{F} e \vec{V}_f la velocità del corpo nell'istante finale dell'azione della stessa forza, allora l'impulso della forza è pari alla variazione della quantità di moto del corpo C. Nell'ipotesi che la massa del corpo C rimanga costante durante l'azione della forza, la variazione della quantità di moto si esprime nella seguente forma:

$$m\Delta\vec{V} = m\left(\vec{V}_f - \vec{V}_i\right)$$

Sussiste pertanto l'uguaglianza

⁽¹⁾ Il testo del problema è riportato nella forma in cui è stato presentato dal richiedente.

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = m \left(\vec{V}_f - \vec{V}_i \right) \quad (1)$$

Nel problema posto i due corpi che interagiscono nell'urto sono il pianeta Terra e l'oggetto di massa $m=8\text{Kg}$ che cade dall'altezza $h=15\text{m}$ rispetto al piano orizzontale del punto d'impatto sulla superficie della Terra. Nel testo del problema non si precisa se l'oggetto rimbalza o se si "schianta" sul pianeta conficcandosi in qualche modo, né si fa riferimento alla durata dell'impatto. Queste considerazioni sono opportune perché se non si precisano i termini il problema non è ben posto e non lo si può risolvere. Suppongo che Lei sia interessato a valutare la forza (di attrito) che il pianeta Terra esercita sul corpo di massa m mentre penetra nella stessa e si arresta dopo Δt secondi. Chiarisco subito che l'intensità di questa forza non è costante: è più intensa all'inizio dell'impatto e decresce man mano che la velocità del corpo diminuisce finché non si arresta. Possiamo tuttavia pensare all'intensità della forza \mathbf{F}_m media esercitata sul corpo durante la frenata. Questa forza è ovviamente diretta verso l'alto. La forza d'urto cui Lei si riferisce è evidentemente la forza che il corpo che si schianta al suolo esercita sulla terra. Questa forza è $-\mathbf{F}_m$, quindi opposta a quella che subisce.

Calcolare dell'intensità \mathbf{F}_m della forza d'urto

Volendo utilizzare la relazione (1) abbiamo bisogno di conoscere la durata dell'impulso. Di solito questo tipo di fenomeno ha la durata di qualche frazione di secondo: la durata dipende dalla consistenza del pianeta Terra in cui avviene l'impatto. Il corpo può cadere sulla roccia, come in acqua, come sulla sabbia o su un terreno fangoso, ecc.... La risposta, è diversa, caso per caso. Semplifichiamo il problema e supponiamo che l'impatto avvenga su una zona rocciosa e che la durata sia $\Delta t=0,01\text{s}$. Con quest'ipotesi, poniamo nella (1)

$$V_f = 0 \frac{m}{s};$$

$$V_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 15m} \approx 17,16 \frac{m}{s};$$

si ricava

$$F = \frac{8\text{Kg} \cdot 17,16\text{ms}^{-1}}{1 \cdot 10^{-2}\text{s}} = 13728\text{N}$$

La forza d'urto esercitata dal corpo nell'impatto, con le ipotesi fatte, ha perciò l'intensità di circa 13700N. E' evidente che se cambiano le ipotesi cambia anche il risultato.

Riporto due esempi diversi per poter effettuare dei paragoni.

E₁) Un giocatore da Golf imprime con la mazza un colpo alla pallina avente massa $m=50\text{g}$ e riesce a farla partire con velocità di 50ms^{-1} . Supponendo che il contatto della mazza con la pallina sia durato $5 \cdot 10^{-4}\text{s}$, l'intensità della forza esercitata dal giocatore è

$$F = \frac{mV}{\Delta t} = \frac{50 \cdot 10^{-3}\text{Kg} \cdot 50\text{ms}^{-1}}{5 \cdot 10^{-4}\text{s}} = 5000\text{N}$$

E₂) Si lancia una palla di massa 200g con velocità $V_i=20\text{ms}^{-1}$ orizzontalmente verso una parete verticale e la palla rimbalza con velocità $V_f=15\text{ms}^{-1}$. Nell'ipotesi che il contatto con la parete sia durato $4,0 \cdot 10^{-2}\text{s}$, calcolare l'intensità della forza media esercitata dalla parete sulla palla.

La forza esercitata dalla parete sulla palla è perpendicolare alla parete e diretta verso l'esterno di questa. Assumendo un asse di riferimento perpendicolare alla parete ed orientato verso l'esterno

della stessa, indicando con \vec{x} il suo versore, l'espressione vettoriale della forza esercitata dalla parete è

$$\vec{F} = \frac{m \left(\vec{V}_f - \vec{V}_i \right)}{\Delta t} = \frac{0,200\text{Kg} (15 - (-20))\text{ms}^{-1}}{4,0 \cdot 10^{-2}\text{s}} \vec{x} = 17,5 \vec{x} (\text{N})$$

In questo caso la forza d'urto esercitata dalla palla sulla parete ha intensità 17,5N.