Urto anelastico e trasformazione dell'energia meccanica

Problema

Per un tiro al bersaglio è stato predisposto un disco di metallo ben levigato avente massa 1,80 Kg, di diametro 20cm, sospeso tramite un filo di acciaio di massa trascurabile e inestensibile ad un gancio. Il filo è lungo 100cm. L'attrito tra filo e gancio è trascurabile. I concorrenti scagliano verso il disco frecce di massa 70g dotate di ventose con cui cercano di fare centro. Il disco, se colpito nel centro oscilla come un pendolo.

Un concorrente scagliando una freccia riesce a fare centro e nota che il centro del disco (insieme alla freccia incollata) nella successiva oscillazione si alza di 2cm rispetto alla quota occupata nello stato di riposo.

Quesiti

1) Determinare il modulo della velocità con cui la freccia ha colpito il disco, nell'ipotesi che la freccia abbia colpito il disco con velocità perpendicolare al piano dello stesso.
2) Determinare quanta energia meccanica è stata dissipata nell'urto tra la freccia ed il disco.
3) Determinare l'angolo formato dalla direzione del filo di sostegno del pendolo con la verticale per il punto di sospensione nell'istante in cui è massima la quota del centro del disco rispetto al piano orizzontale e la durata di un'oscillazione.

Soluzione

Utilizziamo i seguenti simboli

m_1 massa del disco;

m_2 massa di una freccia;

V_1 modulo della velocità con cui la freccia colpisce il disco;

V_2 modulo della velocità con cui il sistema disco+freccia inizia a muoversi dopo l'impatto;

Δh misura dell'variazione di quota del centro del disco.



Figura 1-Immagine reperita in internet

Risoluzione dei quesiti

1) Dalla conservazione della quantità di moto nell'urto si ha

$$m_2\vec{V_1} = (m_1 + m_2)\vec{V_2}\text{, da cui } V_2 = \frac{m_2 V_1}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

L'energia cinetica in possesso del **sistema disco+freccia** subito dopo l'urto è

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_2^2$$

Assumendo come riferimento per l'energia potenziale gravitazionale il piano orizzontale passante per il centro del disco nello stato di riposo, sul quale piano assumiamo nullo il valore dell'energia potenziale, con l'ipotesi che tutti gli attriti sono trascurabili, osserviamo che nel punto di massima altezza raggiunto dal centro del disco tutta l'energia cinetica sarà stata trasformata in energia potenziale e dunque sussiste la seguente uguaglianza

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_2^2 = (m_1 + m_2)g\Delta h$,da cui

$$V_2 = \sqrt{2g\Delta h} \qquad (2)$$

Sostituendo nella (2) l'espressione di V_2 data dalla (1) otteniamo

$\frac{m_2 V_1}{m_1 + m_2} = \sqrt{2g\Delta h}$, da cui $V_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\sqrt{2g\Delta h}$

Sostituiamo ai simboli delle grandezze i rispettivi valori:

$$V_1 = \frac{(1{,}80 + 0{,}07)Kg}{0{,}07Kg}\sqrt{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}02m} = 16{,}7\frac{m}{s}$$

2) Prima dell'impatto della freccia con il disco-bersaglio l'energia meccanica è rappresentata dall'energia cinetica della freccia: $E_i = \frac{1}{2}m_1 V_1^2$; subito dopo l'urto l'energia meccanica è l'energia cinetica del **sistema disco+freccia**, che parte con velocità V_2, quindi $E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_2^2$. Si ha la variazione di energia meccanica

$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_2^2 - \frac{1}{2}m_2 V_1^2 =$ (esprimendo V_2 in funzione di V_1)

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_2 V_1}{m_1 + m_2}\right)^2 - \frac{1}{2}m_2 V_1^2 = \ldots = \frac{1}{2}\left(-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)V_1^2 < 0,$$

quindi

$$\Delta E = -\frac{1{,}80 \cdot 0{,}07Kg^2}{1{,}87Kg} \cdot \left(16{,}7\frac{m}{s}\right)^2 \approx -18{,}8J$$

La variazione è negativa, dunque nell'urto si ha una perdita di energia meccanica disponibile. L'energia persa vale 18,8J. *L'urto è infatti totalmente anelastico*.

Osservazione

L'energia meccanica persa è stata utilizzata in parte per deformare la ventosa della freccia ed in parte si è trasformata in energia termica distribuita tra i componenti del sistema meccanico.

3) La distanza tra il centro di sospensione del "pendolo" e il centro del disco vale l=(100+10)cm. La quota del centro del disco, quando questo è alla massima distanza dalla verticale per il punto di sospensione del filo, è Δh=2cm al di sopra del piano orizzontale di riferimento. Indicata con α l'ampiezza dell'angolo che in detta posizione la direzione del filo del pendolo forma con la verticale per il punto di sospensione si ha

$$\cos\alpha = \frac{l-\Delta h}{l} = \frac{(110-2)cm}{110cm} = \frac{108}{110}, \text{ da cui}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{108}{110}\right) \approx 10°56'$$

Durata dell'oscillazione

Facciamo presente che l'ampiezza massima delle oscillazioni del pendolo, determinata in circa 11°, si può ritenere abbastanza piccola e quindi possiamo assumere come valore del periodo dello stesso

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, valida per il pendolo semplice per oscillazioni di piccola ampiezza.

Supponendo di trascurare tutti gli attriti[1] , il valore del periodo richiesto è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}10m}{9{,}81ms^{-2}}} \approx 2{,}1s$$

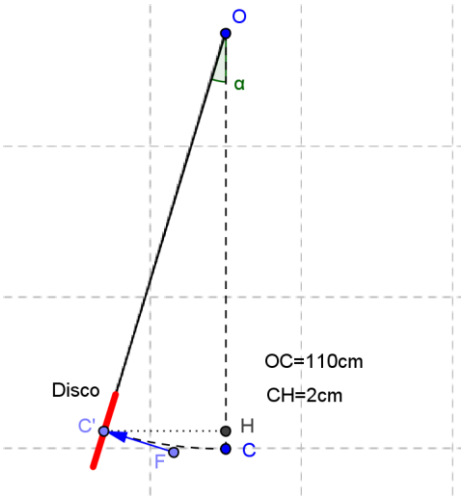

Figura 2-Il disegno illustra la posizione del disco colpito dalla freccia quando si trova alla massima distanza dalla verticale OC. Le dimensioni del disco e del filo sono in scala; non lo è l'ampiezza dell'angolo α, che risulta di circa 17°, maggiore del valore trovato 10°56' e ciò per esigenze grafiche. Ovviamente, non è in scala neanche la variazione di quota CH. Con un disegno in scala i punti C ed H sarebbero molto vicini.

[1] Cosa non verosimile, considerato che il disco, avendo diametro di 20 cm, incontra la notevole resistenza dell'aria. Tuttavia, se si pensa al periodo delle primissime oscillazioni, il valore del periodo indicato è attendibile.