Quesiti sulla gravitazione

Nella tabella Tab.1 sono riportati i valori dei raggi e delle masse del pianeta Terra e del satellite Luna. Risolvere i seguenti quesiti.

Tab.1- Valori di riferimento	
Raggio della Terra	$6{,}378 \cdot 10^{6}$ m
Massa della Terra	$5{,}97 \cdot 10^{24}$ Kg
Raggio della Luna	$1{,}740 \cdot 10^{6}$ m
Massa della Luna	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ Kg
Distanza media Terra-Luna	$3{,}\ 84 \cdot 10^{8}$ m
Costante di gravitazione universale	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{Kg^2}$

Q1- Dare la definizione di campo gravitazionale generato da una massa M nei punti esterni allo spazio fisico occupato dalla massa M.

Sol.

Una massa M posta nello spazio crea in ogni punto di questo un campo vettoriale detto campo gravitazionale. Se la massa è distribuita sfericamente ed omogeneamente o a simmetria sferica, si dimostra che nei punti esterni allo spazio fisico occupato dalla massa la cui distanza dal centro della massa sia r, l'intensità del campo gravitazionale è

$$g = G\frac{M}{r^2},$$

essendo G la costante di gravitazione universale. Il vettore campo è diretto verso il centro della massa M. Collocando una massa *m* in un punto P, esternamente alla massa M, a distanza r dal centro di M, la massa *m* è attratta da M con una forza data dal prodotto tra il vettore $\vec{g}$ e la massa *m*. Quindi, per definizione, per campo vettoriale gravitazionale generato da una massa M in un qualsiasi punto P dello spazio, si intende quel vettore che moltiplicato per il valore di una qualsiasi massa *m* con simmetria sferica collocata con il centro in P fornisce l'intensità della forza gravitazionale esercitata dalla massa M sulla massa *m*.
Se la massa M non è distribuita a simmetria sferica allora il vettore campo gravitazionale creato è diretto verso il centro di massa della massa.

Q2- Determinare il valore del campo gravitazionale generato dalla Luna sulla sua superficie ritenendo che la massa della Luna sia distribuita omogeneamente ed a simmetria sferica.

Sol.

Indicati con R_L ed M_L rispettivamente il raggio e la massa della Luna, il valore del campo gravitazionale sulla sua superficie è

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{Kg}}{\left(1{,}740 \cdot 10^{6}\right)^2\ \text{m}^2} \simeq 1{,}62\frac{m}{s^2}. \qquad (2.*)$$

Q3- Supponendo la Terra di forma sferica e con la massa distribuita a simmetria sferica, determinare il valore del campo gravitazionale generato dalla sua massa sulla sua superficie.

Sol.

Indicati con R_T ed M_T rispettivamente il raggio e la massa della Terra, il valore del campo gravitazionale sulla sua superficie è

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{Kg}}{\left(6{,}378 \cdot 10^{6}\right)^2\ \text{m}^2} \simeq 9{,}79\frac{m}{s^2} \qquad (3.*)$$

Q4 – Determinare il rapporto tra i valori dei due campi gravitazionali trovati nei precedenti quesiti Q2, Q3.

Sol.

Calcoliamo il rapporto tra l'intensità del campo gravitazionale presente sulla superficie della Luna e creato dalla massa della Luna, e quella del campo gravitazionale presente sulla superficie della Terra, determinato dalla massa della Terra.

$$r = \frac{g_L}{g_T} = \frac{1,62}{9,79} \simeq \frac{1}{6} \qquad (4.*)$$

Q5- Determinare i valori delle densità medie ρ_L, ρ_T rispettivamente della Luna e della Terra.

Sol.

Ricordiamo che la densità di un corpo è definita come il rapporto tra la sua massa e la misura del volume che la stessa occupa.

Il volume di una sfera di raggio R è $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

I valori delle densità dei due astri sono:

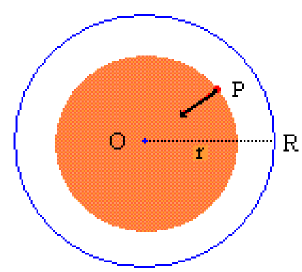
$$\rho_L = \frac{M_L}{\frac{4}{3}\pi R_L^{\ 3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7,35 \cdot 10^{22}\ \text{Kg}}{\pi\left(1,740 \cdot 10^6\right)^3} \simeq 3,33 \cdot 10^3\ \frac{Kg}{m^3}$$

$$\rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^{\ 3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24}\ \text{Kg}}{\pi\left(6,378 \cdot 10^6\right)^3 m^3} \simeq 5,496 \cdot 10^3\ \frac{Kg}{m^3}$$

Q6- Ritenendo composte omogeneamente la Luna e la Terra con le densità prima determinate, calcolare i valori dei campi gravitazionali creati dai due astri nei punti interni agli stessi che si trovano a distanza pari alla metà dei rispettivi raggi. Calcolare il rapporto tra i due valori trovati e confrontarlo con il risultato ottenuto nel precedente quesito Q4.

Sol.

Il campo gravitazionale in un punto P interno a ciascun astro dipende dalla densità e dalla distanza dal centro O dell'astro. In particolare si dimostra che nelle ipotesi di distribuzione a simmetria sferica della massa, il campo gravitazionale nel punto P è dovuto solo alla massa racchiusa nella sfera di centro O e raggio OP=r. Indicando con ρ il valore (ritenuto costante) della densità, il valore del campo gravitazionale è



$$g(P) = \frac{4}{3}\pi G \rho r \text{, con } 0 \le r \le R, \qquad (6.*)$$

essendo R la misura del raggio dell'astro.

La (6.*) indica che l'intensità del campo gravitazionale è direttamente proporzionale alla distanza del punto dal centro dell'astro.

Osservazione

Notiamo che se nella relazione si pone r=R , in riferimento alla Luna si ottiene il valore del campo gravitazionale sulla superficie lunare; analogamente, in relazione alla Terra si ottiene il valore del campo gravitazionale sulla superficie del pianeta.

Poiché per i due astri dobbiamo considerare i punti P che si trovano a distanza **R/2** dal centro del rispettivo astro, in virtù della precedente osservazione, risultando per la Terra

$$r = \overline{OP} = \frac{1}{2}R_T \qquad \Rightarrow \qquad g_T(P) = \frac{4}{3}\pi G \rho_T \frac{1}{2}R_T = \frac{2}{3}\pi G \rho_T R_T,$$

si evince che il valore è metà di quello presente sulla superficie, quindi

$$g_T(P) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi G \rho_T \cdot R_T \right) = 0,5 \cdot 9,79 \frac{m}{s^2} \simeq 4,90 \frac{m}{s^2}.$$

Analogamente, il valore del campo gravitazionale nei corrispondenti punti interni della Luna è la metà di quello sulla superficie della stessa, dunque

$$g_L(P) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi G \rho_L \cdot R_L \right) = 0,5 \cdot 1,62 \frac{m}{s^2} = 0,81 \frac{m}{s^2}$$

Calcolo del rapporto delle intensità dei campi gravitazionali

Sostituendo i valori determinati per i due campi gravitazionali si ha:

$$\frac{g_L(P)}{g_T(P)} = \frac{0,81 \frac{m}{s^2}}{4,90 \frac{m}{s^2}} \approx 0,1653 \approx \frac{1}{6}.$$

Le considerazioni svolte in precedenza permettono di affermare che il rapporto richiesto coincide con il valore del rapporto tra i valori dei rispettivi campi calcolati sulle superfici dei due astri. Dunque il valore richiesto è quello indicato dalla (4.*).

Osservazione

Per il rapporto si può anche ottenere la seguente interessante forma

$$r_1 = \frac{g_L(P)}{g_T(P)} = \frac{2}{3} \pi G \rho_L R_L : \left(\frac{2}{3} \pi G \rho_T R_T \right) = \frac{\rho_L R_L}{\rho_T R_T}$$