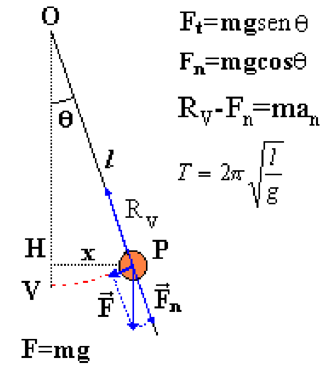
Pendolo semplice

Si definisce pendolo semplice o matematico il sistema meccanico composto di una massa puntiforme legata ad un filo inestensibile di lunghezza *l* e massa trascurabile fissata ad un punto O. Il sistema può oscillare in un piano verticale passante per il punto O supponendo trascurabili gli attriti; inoltre, le ampiezze degli angoli per le oscillazioni devono essere “piccole” (non superare 10°-12°).

Fig.1 Pendolo semplice



Si vuole studiare il moto di questo sistema meccanico

Supponiamo che la massa m sia in posizione d’equilibrio, ferma sulla verticale per O. Spostandola lateralmente nella posizione P e lasciandola successivamente libera, evidentemente comincerà ad oscillare. Avendo supposto trascurabili gli attriti si conserverà l’energia meccanica ed il moto risulterà periodico.

Forze agenti sulla massa

Osserviamo che dall’istante in cui la massa è lasciata libera risulta soggetta a due forze: il suo peso $\vec{F} = m\vec{g}$ e la tensione del filo, che in figura è stata indicata con $\vec{R}_V$, per ricordare che si tratta della reazione vincolare.

Il moto della massa è quello prodotto dalla risultante delle due suddette forze. Si osserverà che la reazione vincolare agisce solo lungo la direzione del filo (direzione radiale) ed è diretta verso il punto d’applicazione O dello stesso. La massa si muove su un arco di circonferenza di centro O e **raggio** *l* e quindi la reazione vincolare $\vec{R}_V$ non ha componente lungo la direzione dello spostamento istantaneo. Per contro, la forza peso della massa ha la componente $F_t = mg \cdot sen\theta$ lungo la direzione della tangente ed è questa che provoca l’avvicinamento della massa alla verticale per il punto O. Notiamo infine che la componente $\vec{F}_n$ della forza peso lungo la direzione radiale vale $F_n = mg \cdot cos\,\theta$ ed a questa si oppone la reazione vincolare $\vec{R}_V$ esercitata dal filo. Per quanto concerne il modulo di $\vec{R}_V$ facciamo presente che non coincide con quello di $\vec{F}_n$. Infatti, detta $\vec{a}$ l’accelerazione istantanea con cui si muove la massa m, scomponendo questa lungo la direzione della tangente e la direzione radiale $\vec{OP}$, si ha

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad (1)$$

Per fissare le idee supponiamo di considerare come positivo sulla **direzione radiale** il verso uscente. Proiettando la seconda legge della dinamica

$$m\vec{g} + \vec{R}_V = m\vec{a} \qquad (2)$$

su tale asse si ha

$$mg\,cos\,\theta - R_V = ma_n \qquad (2.1)$$

È evidente che **la componente scalare a_n dell'accelerazione della massa non può essere nulla;** infatti, è quella che garantisce che la massa sia deviata dalla traiettoria rettilinea. Sappiamo, del resto, che, se un punto descrive un moto curvilineo è soggetto ad accelerazione e questo vettore è diretto verso l'interno della traiettoria. Pertanto, la componente delle forze agenti sulla massa lungo la direzione radiale è non nulla, e precisamente deve essere un vettore diretto verso il centro della traiettoria. In virtù della scelta per il verso positivo lungo la direzione radiale, deduciamo la componente a_n <0 e quindi che si ha anche

$$mg\cos\theta - R_V < 0 \Rightarrow R_V > mg\cos\theta \qquad (3)$$

Caratteristiche del moto

È evidente che il moto descritto dalla massa ***m*** sarà completamente noto se si riuscirà a determinare istante per istante l'ampiezza dell'angolo θ che il filo OP forma con la verticale. Al fine di eliminare ogni ambiguità è opportuno **definire un'origine ed un verso positivo per la misura degli angoli**. Supponiamo di scegliere come origine per gli angoli la semiretta verticale passante per O e come verso (positivo) quello antiorario. Con tale convenzione al punto P indicato in Fig.1 corrisponde un angolo θ>0, mentre alla posizione P' simmetrica di P rispetto alla semiretta OV corrisponde l'angolo opposto -θ<0. Adottiamo altresì un sistema di ascisse curvilinee aventi origine in V e con verso positivo coincidente con quello dei valori crescenti dell'angolo θ. Indichiamo con ***s*** il valore dell'ascissa curvilinea del punto P. Tale numero esprime la misura orientata dell'arco di circonferenza di estremi V e P.
In accordo con la scelta del verso positivo per le ascisse curvilinee adottiamo per il versore $\hat{t}$ associato alla tangente alla circonferenza in P come verso positivo ancora quello concorde con il verso delle ascisse curvilinee crescenti.

Notiamo che delle due forze agenti sulla massa ***m*** la reazione vincolare $\vec{R}_V$ non ha componente, mentre la componente della forza peso $m\vec{g}$ è

$$\vec{F}_\tau = mg \cdot sen\theta \cdot \hat{t}$$

e per la seconda legge della dinamica proiettata sulla direzione della tangente nel punto P possiamo scrivere

$$mg \cdot sen\theta \cdot \hat{t} = m\vec{a}_t \qquad (2.2)$$

Notiamo ora che per ogni posizione del punto P la componente vettoriale dell'accelerazione lungo la tangente ha verso opposto a quello dei valori crescenti di θ:

con θ>0 (il pendolo si trova a destra della verticale OV) risulta a_t<0;
con θ<0 (il pendolo si trova a sinistra della verticale OV) risulta a_t>0

e quindi l'espressione scalare della (2.2) proiettata sulla tangente è

$$mg \cdot sen\theta = -ma_t \Rightarrow a_t = -gsen\theta \qquad (2.2.1)$$

Avendo introdotto le ascisse curvilinee ***s*** sulla traiettoria, indicando con ***s***(t) la legge oraria, dalla definizione di accelerazione sappiamo che sussiste l'uguaglianza

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad (4)$$

e quindi anche

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -gsen\theta \qquad (5)$$

La (5) è **un'equazione differenziale** nella quale figurano le due funzioni incognite s(t) e θ(t). In realtà non sono due le incognite. Infatti, con θ espresso in radianti, sappiamo che tra la misura s(t) dell'arco VP, la misura del raggio OP=*l* e l'ampiezza θ(t) dell'angolo sussiste l'uguaglianza

$$s(t) = l \cdot \theta(t) \qquad (6)$$

e quindi la (5) può essere scritta facendo comparire solo l'ascissa curvilinea ***s***(t) o solo l'ampiezza θ(t) dell'angolo. Se si opta per l'ascissa curvilinea si ha

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -gsen\left(\frac{s}{l}\right) \qquad (7)$$

Semplificazione della (5)

Vogliamo far vedere che, se le ampiezze delle oscillazioni del pendolo sono contenute, diciamo entro i 15°, allora l'espressione della (5) diventa notevolmente più semplice.

Cominciamo con l'osservare che dalla Fig.1 si evince che $x = l \cdot sen\theta$, quindi $sen\theta = \frac{x}{l}$, nelle quali ***x* indica la distanza orientata del punto P dalla verticale OV**.

Nella Tabella 1 indicata a lato sono riportati i valori dell'angolo θ (sia in radianti, sia in gradi) ed i valori delle differenze $\theta - sen\theta$. Si può notare che per 0°≤θ≤10° la differenza suddetta è inferiore ad 10^{-3} e che se 10°<θ≤15° la differenza non supera $3 \cdot 10^{-3}$.

Queste considerazioni indicano che se l'ampiezza delle oscillazioni non supera i 15° si può approssimare la funzione senθ con la misura dell'angolo θ espressa in radianti.

Limitiamoci dunque a studiare il moto del pendolo per "queste piccole oscillazioni".

Studio del moto del pendolo per

$0° \le \theta° \le 15° \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{12}$ Rad

Tabella 1

θ Gradi	θ Radianti	senθ	θ-senθ
0	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,5	0,008726646	0,008726535	0,000000111
1	0,017453293	0,017452406	0,000000886
1,5	0,026179939	0,026176948	0,000002990
2	0,034906585	0,034899497	0,000007088
2,5	0,043633231	0,043619387	0,000013844
3	0,052359878	0,052335956	0,000023921
3,5	0,061086524	0,061048539	0,000037984
4	0,069813170	0,069756474	0,000056696
4,5	0,078539816	0,078459096	0,000080721
5	0,087266463	0,087155743	0,000110720
5,5	0,095993109	0,095845752	0,000147356
6	0,104719755	0,104528463	0,000191292
6,5	0,113446401	0,113203214	0,000243188
7	0,122173048	0,121869343	0,000303704
7,5	0,130899694	0,130526192	0,000373502
8	0,139626340	0,139173101	0,000453239
8,5	0,148352986	0,147809411	0,000543575
9	0,157079633	0,156434465	0,000645168
9,5	0,165806279	0,165047606	0,000758673
10	0,174532925	0,173648177	0,000884748
10,5	0,183259571	0,182235525	0,001024046
11	0,191986218	0,190808995	0,001177222
11,5	0,200712864	0,199367934	0,001344930
12	0,209439510	0,207911691	0,001527819
13	0,226892803	0,224951054	0,001941748
14	0,244346095	0,241921895	0,002424200
15	0,261799388	0,258819045	0,002980343
16	0,279252680	0,275637356	0,003615324
17	0,296705973	0,292371704	0,004334268
18	0,314159265	0,309016994	0,005142271
19	0,331612558	0,325568154	0,006044403
20	0,349065850	0,342020143	0,007045707

Per questi valori dell'angolo θ, utilizzando la misura in radianti, possiamo porre $sen\theta \simeq \theta$ quindi l'equazione (5) assume la forma

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\theta \qquad (5.1)$$

ovvero, sussistendo la (6)

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\frac{s}{l}$$

Pertanto, lungo la traiettoria del punto la relazione tra il modulo dell'accelerazione (tangenziale) e la distanza curvilinea dal centro V di oscillazione è identica a quella del moto relativo al sistema **massa-molla** (oscillatore armonico) su un piano orizzontale ed a quella del **pendolo elastico**. In definitiva anche in questo caso il moto di oscillazione del punto P intorno alla posizione di equilibrio V è armonico semplice.

In luogo della costante $\frac{K}{m}$ figura il rapporto $\frac{g}{l}$ e dunque l'espressione dell'ascissa curvilinea è una funzione del tipo

Tab.2 – Valori delle grandezze per il pendolo elastico e per il sistema massa-molla

- $a=-\frac{K}{m}x$ Relazione tra accelerazione e distanza della massa dal centro di oscillazione sia per un pendolo elastico che per un sistema massa molla.
- $x=A\cdot cos(\omega t)=A\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)$ Equazione del moto
- $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ Periodo

$$s=A\cdot cos(\omega t)=A\cdot cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \qquad (8)$$

essendo $\omega^2=\frac{g}{l}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$ (9)

Il periodo del pendolo sarà quindi ancora

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (10)$$

Osservazione

La costante A che compare nella (8) rappresenta la **misura massima dell'ascissa curvilinea**, cioè la lunghezza massima di arco di circonferenza descritto dal pendolo nel suo moto rispetto al centro V di oscillazione. Questo valore corrisponde alla posizione iniziale. Infatti per t=0 si ricava $s(t=0)=s_o=A$. Possiamo perciò scrivere la (8) anche nella forma

$$s=s_o\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$$

In virtù della (6), una volta ricavata l'espressione dell'ascissa curvilinea si può scrivere anche la legge oraria con cui varia l'angolo θ. Si ha

$$\theta=\frac{s}{l}=\frac{s_o}{l}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$$

Alcune considerazioni sul sistema ideale

Vogliamo fare osservare che le ipotesi poste sul sistema meccanico in realtà non si verificano perché:

- la massa, per quanto possa essere "puntiforme" non sarà mai un punto nel senso matematico e quindi nel suo moto, se l'esperienza avviene nell'aria, incontrerà la resistenza di questa;
- il filo, per quanto robusto possa essere, subirà una certa dilatazione per effetto del peso applicato. Dal disegno emerge che il filo in ogni istante deve vincere la componente della forza peso della massa lungo la direzione radiale e questa è variabile perché dipende dall'angolo che in quell'istante il filo forma con la verticale. Ciò implica che la lunghezza del filo è variabile.