Sul centro di massa

Centro di massa di una corda omogenea che si deforma

Problema

Una corda omogenea, inestensibile, di lunghezza L e massa m è adagiata su un piano orizzontale completamente distesa in linea retta. Un operatore afferra un estremo e lo solleva con velocità costante v lungo la verticale. La corda, perfettamente flessibile, durante il sollevamento si distribuisce lungo i cateti di un triangolo rettangolo. Determinare le coordinate del centro di massa del "sistema corda" durante il tempo necessario affinché tutta la corda sia disposta lungo la verticale rispetto al piano orizzontale in cui è adagiata inizialmente.

Elaborazioni

Strategia risolutiva

Sia AB il segmento ideale che rappresenta la corda di lunghezza L. Per la descrizione del fenomeno fisico adottiamo un sistema di coordinate cartesiane xOy avente l'asse x coincidente con la direzione della corda, l'origine O nell'estremo A della corda e l'altro estremo B sul semiasse positivo delle ascisse; l'asse y coincidente con la verticale per A ed orientato verso l'alto.

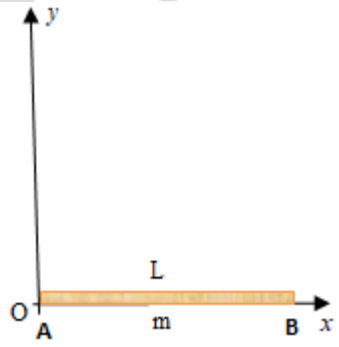

Figura 1- Posizione iniziale della corda.

Sappiamo che l'operatore solleva con velocità costante v l'estremo A lungo l'asse y e di conseguenza l'estremo B, muovendosi sull'asse x, si avvicina all'origine O degli assi.

Dopo alcuni istanti una parte della corda di lunghezza L_1 sarà disposta lungo l'asse verticale (l'asse y) e la parte rimanente, di lunghezza $L_2=L-L_1$, giacerà ancora lungo il semiasse positivo delle ascisse. Ciascuno dei due tratti di corda, per la supposta omogeneità della corda, ha il proprio centro di massa nel rispettivo punto medio: il tratto verticale avrà il centro di massa nel punto di coordinate $(0;L_1/2)$, quello orizzontale avrà il centro di massa nel punto di coordinate $(L_2/2;0)$. Assumendo il modello di sistema di due masse composto dalle masse (puntiformi) dei due tratti di corda concentrate nei rispettivi centri di massa, potremo determinare la posizione del centro di massa del sistema se riusciremo a determinare in funzione del tempo t i valori delle masse m_1, m_2, dei due tratti di corda. Per questo scopo *introduciamo il concetto di densità lineare della corda*, che indichiamo con λ, definito come rapporto tra la massa totale m della corda e la lunghezza L della stessa: $\lambda=m/L$.

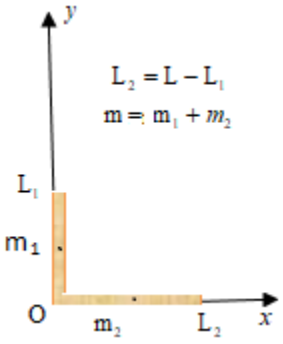

Figura 2- Posizione della corda dopo t secondi dall'inizio del moto dell'estremo A verso l'alto.

Elaborazioni

L'estremo A della corda si muove verso l'alto con legge oraria $y_A=vt$. Anche l'estremo B si muove verso l'origine O degli assi con velocità avente lo stesso modulo v; la sua legge oraria sarà $x_B=L- vt$.

Il centro di massa del tratto orizzontale nell'istante t è nel punto $P\left(\frac{x_B}{2};0\right)=\left(\frac{L-vt}{2};0\right)$, e il centro di massa del tratto di corda verticale nello stesso istante è nel punto $Q\left(0;\frac{y_A}{2}\right)=\left(0;\frac{vt}{2}\right)$. Nello stesso istante i valori delle masse concentrate nei due tratti di corda saranno:

nel tratto di corda verticale $m_1=\lambda\cdot y_A=\lambda\cdot vt$;

nel tratto di corda orizzontale $m_2=m-m_1=\lambda\cdot L-\lambda\cdot vt=\lambda\cdot(L-vt)$.

Possiamo determinare le coordinate del centro di massa CM del "sistema corda ad angolo retto". Si ha:

$$x_{CM}=\frac{m_2\cdot\frac{x_B}{2}+m_1\cdot 0}{m_1+m_2}=\frac{\lambda\cdot(L-vt)\cdot\frac{L-vt}{2}}{\lambda\cdot y_A+\lambda\cdot x_B}=\frac{\frac{\lambda}{2}\cdot(L-vt)^2}{\lambda\cdot(y_A+x_B)}=\frac{(L-vt)^2}{2L};$$

$$y_{CM}=\frac{m_2\cdot y_P+m_1\cdot y_Q}{m_1+m_2}=\frac{m_2\cdot 0+m_1\cdot\frac{y_A}{2}}{m_1+m_2}=\frac{\lambda\cdot y_A\cdot\frac{y_A}{2}}{\lambda\cdot L}=\frac{y_A^2}{2L}=\frac{v^2t^2}{2L}$$

Caso di una corda particolare

Lunghezza L=2m, massa m=750g; v=0,5m/s.

La durata del fenomeno fisico è $\Delta t=\frac{L}{v}=\frac{2m}{0,5ms^{-1}}=4s$;

La legge fisica della quota del centro di massa è in metri $y_{CM}=\frac{1}{2L}\cdot v^2t^2=0,25\cdot 0,25t^2=0,0625t^2$, con $0s\le t\le 4s$.

Equazioni parametriche della curva decritta dal centro di massa in funzione del parametro tempo t.

$$x_{CM}=\frac{(L-vt)^2}{2L}=\frac{(2-0,5t)^2}{4};$$

$$y_{CM}=\frac{(0,5t)^2}{4}=\frac{t^2}{16},\ \text{con}\ 0s\le t\le 4s$$

Comando da implementare in GeoGebra per ottenere la traiettoria descritta dal centro di massa del sistema corda mentre si solleva il suo estremo di ascissa nulla finché non si dispone la corda in posizione verticale.

Curva(((2-0.5*t)^2/4), t^2/16, t, 0, 4)

Il fenomeno fisico dura 4s.

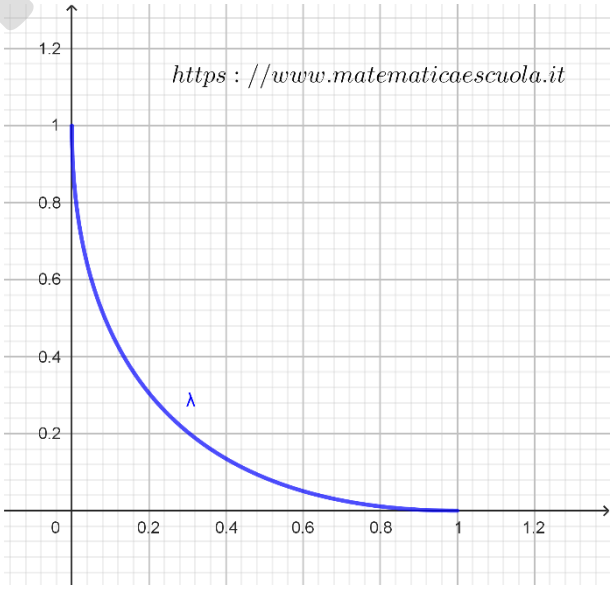

Figura 3-Curva descritta dal centro di massa della corda