Dinamica rotazionale

Problema

Nella macchina di Atwood illustrata in figura le due masse m_1=4Kg, m_2=3Kg, sono collegate da una funicella inestensibile di massa trascurabile che passa attraverso la gola di una carrucola di massa incognita m_3. Quando il sistema è in moto la funicella mette in rotazione la carrucola senza slittare. E' noto che il sistema meccanico alloggiato su una piattaforma è mantenuto fermo e all'istante t=0s viene lasciato libero. Sapendo che la massa m_1 tocca la base della piattaforma dopo aver percorso la distanza h=1,2m in 1,50s, determinare il valore del modulo dell'accelerazione con cui si muovono le masse m_1,m_2 , il modulo della velocità con cui m_1 impatta sulla piattaforma e il valore della massa m_3. Determinare altresì le tensioni cui sono sottoposti i tratti della funicella durante il moto.

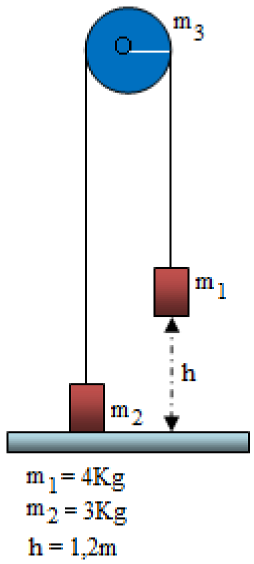

Figura 1

Si consideri la carrucola come un cilindro pieno omogeneo.

Risposte

Accelerazione: a=1,07m/s^2. Velocità finale:V_{1f}=1,61m/s. m_3=4,34Kg. Tensione del tratto con un estremo su m_1: T_1=35,0N; tensione del tratto con un estremo su m_2:T_2=32,6N.

Risoluzione

Completiamo la figura indicando le tensioni dei due tratti della funicella di collegamento delle due masse e con l'introduzione di un asse verticale di riferimento per le quote per il quale l'origine è fissato in corrispondenza della massa m_1, orientato verso il basso (Figura_2).

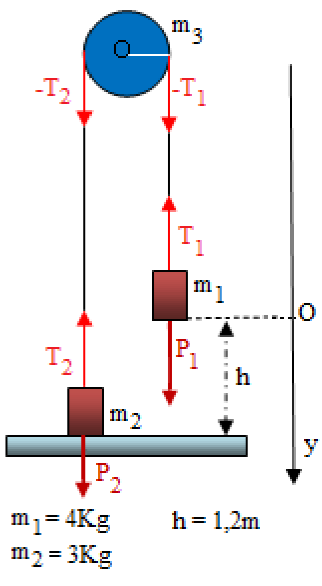

Figura 2

Strategia risolutiva

Per risolvere il problema si osserva intanto che le due masse e i punti del bordo della carrucola una volta lasciato libero il sistema si muoveranno con accelerazioni lineari che hanno lo stesso modulo. Alle due masse m_1, m_2 si applicherà la seconda legge della dinamica in riferimento alle due forze agenti su ciascuna. Per la carrucola si terrà presente che il suo peso è equilibrato dalla reazione vincolare esercitata dall'asse di supporto passante per il centro di massa O della carrucola, che le azioni esercitate dai due tratti della funicella che la collegano alle due masse determinano due momenti meccanici di segno opposto e la loro somma τ uguaglia il prodotto del momento d'inerzia I della carrucola rispetto all'asse di rotazione (perpendicolare al piano del foglio) con l'accelerazione angolare α, quindi τ=Iα.

Sfruttando infine le leggi del moto di caduta della massa m_1 che si muoverà di moto uniformemente accelerato con accelerazione a, dalle informazioni del tempo di caduta e dal valore dell'altezza si determinerà il modulo dell'accelerazione a.

Elaborazioni

La massa m2 quando il sistema è fermo poggia sulla piattaforma; una volta avviato il moto per i tre corpi massivi si verifica che:

1) Sulla massa m_1 agiscono la forza peso $\vec{P_1} = m_1\vec{g}$, diretta lungo la verticale per il centro di massa di m_1, orientata verso il baso, e la tensione $\vec{T_1}$, esercitata dalla funicella, diretta ancora lungo la stessa verticale e orientata verso il masso. Per la seconda legge della dinamica, indicata con $\vec{a_1}$ l'accelerazione con cui si muove la massa , sussiste l'equazione vettoriale

$$m_1\vec{g} + \vec{T_1} = m_1\vec{a_1} \qquad (1).$$

2) Sulla massa m_2 agiscono la forza peso $\vec{P_2} = m_2\vec{g}$ e la tensione $\vec{T_2}$, dirette lungo la verticale per il centro di massa di m2, con la forza peso orientata verso il basso e la tensione verso l'alto. Sussiste l'equazione vettoriale

$$m_2\vec{g} + \vec{T_2} = m_2\vec{a_2} \qquad (2).$$

3) Sulla carrucola agiscono la forza peso $\vec{P_3} = m_3\vec{g}$, la reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dall'asse di supporto intorno al quale la carrucola ruota (senza attrito), non riportate in figura, e le due tensioni $-\vec{T_1}$, $-\vec{T_2}$. Le due forze $\vec{P_3}$, $\vec{R}$ si annullano a vicenda e non hanno alcuna incidenza sul moto della carrucola. Le due tensioni, invece, determinano un momento meccanico complessivo $\vec{\tau}$ che causa la rotazione della carrucola. Indicando con $\vec{\alpha}$ l'accelerazione angolare sussiste l'uguaglianza $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$.

Per la descrizione del moto è stato introdotto in figura l'asse di riferimento verticale y orientato verso il basso.

Osserviamo che le due masse m_1, m_2, si muovono solidalmente e quindi le loro accelerazioni sono opposte: $\vec{a_2} = -\vec{a_1}$; sia *a* il loro modulo. Anche i punti del bordo della carrucola si muovono con accelerazione tangenziale $\vec{a_t}$ avente modulo *a*. Infine, considerato che $m_1 > m_2$, il sistema si muoverà con m_1 che scende ed m_2 che sale.

Le espressioni scalari delle leggi del moto delle due masse m_1, m_2 riferite all'asse y indicato sono:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \qquad (1.1)$$

$$m_2 g - T_2 = -m_2 a \qquad (2.1)$$

Per la carrucola, il momento meccanico della tensione $-\vec{T_1}$ fa ruotare la carrucola in senso orario (per chi osserva la figura) e quello della tensione $-\vec{T_2}$ fa ruotare la stessa in senso antiorario. Poiché i rispettivi moduli sono $T_1 \cdot r$, $T_2 \cdot r$, essendo r il raggio della carrucola, l'espressione scalare del momento torcente complessivo è

$$T_1 \cdot r - T_2 \cdot r = I\alpha \qquad (3.1).$$

A questo punto ricordiamo che il momento d'inerzia della carrucola rispetto all'asse di rotazione è

$$I = \frac{1}{2} m_3 r^2 \qquad (4)$$

e che tra il modulo dell'accelerazione tangenziale a_t e l'accelerazione angolare α sussiste la relazione

$$a_t = r \cdot \alpha \,. \qquad (5)$$

Utilizzando le relazioni (4) e (5) nella la (3.1) e con $a_t = a$ si ottiene

$$(T_1 - T_2) \cdot r = I\alpha \to (T_1 - T_2) \cdot r = \frac{1}{2} m_3 r^2 \cdot \frac{a}{r} \to T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_3 a \qquad (3.2)$$

Sussiste dunque il seguente sistema di equazioni

$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = -m_2 a \\ T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_3 a \end{cases}$, in cui figurano come incognite m_3, T_1, T_2 ed a. (6)

Occorre una quarta relazione, indipendente dalle precedenti, per calcolare i valori delle quattro grandezze indicate. Facciamo presente che ancora non sono state utilizzate le informazioni cinematiche relative al moto della massa m_1.

Il moto di questa è uniformemente accelerato, con accelerazione di modulo *a* e velocità iniziale nulla.

Nel sistema di riferimento dell'asse y, con istante iniziale t=0s, le leggi sono:

$V_1 = at$, quella della velocità;

$y = \frac{1}{2} at^2$, quella della quota, avendo assunto l'origine dell'asse nella posizione iniziale della base della massa.

Ponendo y=h=1,2m e t=1,50s si determina il modulo dell'accelerazione

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 1{,}2m}{(1{,}50)^2 s^2} \approx 1{,}07 \frac{m}{s^2}$$

Valore della velocità finale con cui la massa m_1 impatta sulla base della piattaforma

$$V_{1f} = 1{,}07 \frac{m}{s^2} \cdot 1{,}50s \approx 1{,}61 \frac{m}{s} \,.$$

Risolvendo il sistema di equazioni (6) si ricava

$$\begin{cases} T_1 = m_1 (g - a) \\ T_2 = m_2 (g + a) \\ m_3 = \dfrac{2(m_1 - m_2) g}{a} - 2(m_1 + m_2) \end{cases} \to \begin{cases} T_1 = 35{,}0N \\ T_2 = 32{,}6N \\ m_3 = 4{,}34Kg \end{cases}$$