Tema: Dinamica
Conservazione dell'energia meccanica - Teorema dell'energia cinetica

Problema

Un trapezista ha massa 60Kg ed è agganciato ad una funicella inestensibile di massa trascurabile lunga 5m. Il secondo estremo della funicella è agganciato al sostegno O. Il trapezista si lascia cadere con velocità iniziale nulla dalla piattaforma collocata alla stessa altezza del punto O rispetto al suolo.

1. Descrivere il moto del trapezista.
2. Determinare la velocità del trapezista e la tensione della funicella quanto il trapezista si troverà sulla verticale per O.
3. Determinare la velocità del trapezista quando la funicella forma un angolo di 45° con la verticale per O.
4. Determinare l'angolo che la funicella forma con la verticale per O quando il modulo della velocità del trapezista è uguale alla metà del valore massimo raggiungibile.

Elaborazioni

1. Il problema in esame si risolve agevolmente applicando il principio di conservazione dell'energia.
   Poiché nel testo non si fa alcuna ipotesi su eventuali attriti supponiamo che questi siano trascurabili.
   Il trapezista descriverà un moto circolare perché è vincolato dalla funicella. La sua distanza dal centro O di rotazione è costante. E' immediato riconoscere che partendo dal punto A arriverà nel punto B collocato alla stessa quota di A; B è il secondo estremo del diametro della semicirconferenza di centro O.

   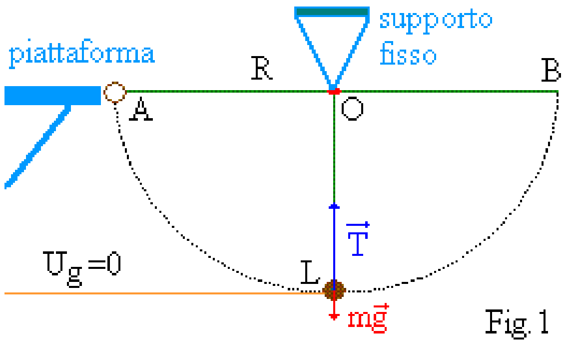

   Fig. 1

   Il moto avviene per effetto della forza gravitazionale (forza peso del trapezista) che è conservativa e si conserva l'energia meccanica complessiva perché sono trascurabili gli attriti. Una volta giunto in B il trapezista ridiscenderà per ritornare in A. Il moto continuerà con le stesse caratteristiche. Precisiamo che il modulo della velocità è variabile.
2. Poniamo uguale a zero l'energia gravitazionale sul piano orizzontale passante per il punto L, punto più in basso per il quale passa il baricentro del trapezista (vedi figura). Poniamo R=5m la misura della funicella.
   Nella posizione A il trapezista ha velocità nulla e la sua energia potenziale gravitazionale vale *U=mgR*. Quando passerà dal punto L è nulla l'energia potenziale gravitazionale e l'energia meccanica del trapezista sarà uguale alla sola energia cinetica. Sussiste la seguente uguaglianza

   $$\frac{1}{2}mv^2 = mgR \Rightarrow v = \sqrt{2gR} = 9{,}90ms^{-1} \qquad (1)$$

   Calcolo della tensione della funicella nel punto L

   Nella posizione L sul trapezista agiscono due forze dirette lungo la verticale: la forza peso $m\vec{g}$ diretta verso il basso e la tensione della funicella $\vec{T}$ diretta verso l'alto. Indicata con $\vec{a}$ l'accelerazione del trapezista nell'istante in cui passa da L, per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere l'uguaglianza

$$m\vec{g}+\vec{T}=m\vec{a} \qquad (2)$$

Dalla quale si deduce che anche l'accelerazione è diretta lungo la verticale, più precisamente, è diretta verso il centro O (accelerazione centripeta). Possiamo scrivere la (2) in forma scalare secondo un asse di riferimento verticale orientato verso l'alto. Si ottiene:

$$-mg+T=ma \Rightarrow T=m(g+a) \qquad (2.1)$$

Ricordiamo ora che in un moto curvilineo il modulo dell'accelerazione centripeta è

$$a_c=\frac{v^2}{R} \qquad (3)$$

e tenendo conto dell'espressione (1) per il modulo della velocità lineare si può scrivere

$$a_c=\frac{v^2}{R}=\frac{\left(\sqrt{2gR}\right)^2}{R}=2g$$

Il valore della tensione T è allora

$$T=m(g+2g)=3mg\,.$$

Conclusione

La tensione della funicella è pari a tre volte il peso del trapezista. Sostituendo i valori alle grandezze si ha:

$$T=3\cdot 60Kg\cdot 9.81\frac{m}{s^2}\approx 1766N$$

3. In Fig.2 è indicata con C una delle due posizioni nelle quali la funicella che regge il trapezista forma un angolo di 45° con la verticale per il centro O. Il trapezista sta scendendo. Nella posizione indicata il trapezista possiede energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale e la loro somma è uguale all'energia potenziale gravitazionale iniziale. Per quanto riguarda il valore dell'energia potenziale gravitazionale residua, notiamo che vale

$$U_g=mg\cdot\overline{LH}=mg\left(R-R\cos 45°\right)=mgR\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

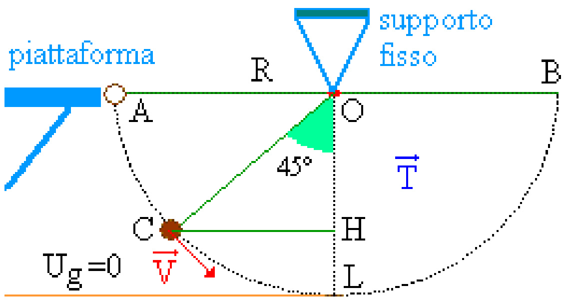

Fig.2

Indicando con V_1 il modulo della velocità in C sussiste l'uguaglianza

$$E_c+U_g=\frac{1}{2}mV_1^2+mgR\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=mgR$$

Risolvendo l'equazione nell'incognita V_1 si ricava

$$V_1=\sqrt{gR\sqrt{2}}\approx\sqrt{9,81\frac{m}{s^2}\cdot 5m\cdot\sqrt{2}}\approx 8,33\frac{m}{s}$$

4. Il trapezista raggiunge la velocità massima quando passa per il punto L, cioè per la verticale per il centro O di rotazione. Questo valore è stato calcolato nel quesito n.2 e risulta

$$V_{\max}=\sqrt{2gR}\,.$$

Abbiamo già precisato che il moto del trapezista è oscillatorio intorno al punto O; nella fase di ritorno da B verso A, quando il trapezista ripasserà da una qualsiasi posizione P, la velocità avrà lo stesso modulo della velocità posseduta nello stesso punto nella fase di "andata" mentre il verso sarà opposto. Sia P la posizione nella fase di andata da A verso B, durante la discesa, nella quale la velocità sia $V_{\max}/2$. Indichiamo con P′ la proiezione ortogonale di P sulla verticale per O e con α l'angolo formato dalla funicella con la stessa verticale.

Il valore dell'energia potenziale gravitazione posseduta dal trapezista nella posizione P è

$$U_g = mg \cdot \overline{LP'} = mgR(1-\cos\alpha)$$

La relazione dedotta dalla conservazione dell'energia meccanica, uguagliando l'energia nella posizione OP all'energia iniziale posseduta in A, è:

$$E_c + U_g = \frac{1}{2}mV_P^2 + mgR(1-\cos\alpha) = mgR \Rightarrow \frac{1}{2}V_P^2 = gR\cos\alpha$$

Poiché deve essere

$$V_p = \frac{V_{\max}}{2} = \frac{\sqrt{2gR}}{2} \Rightarrow V_P^2 = \frac{gR}{2}$$

e quindi si deve verificare l'uguaglianza

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{gR}{2} = gR\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos(0,25) \approx 75°31'$$