Urto Elastico

Urto unidimensionale

Un furgone di massa 1800Kg procede con velocità di 10m/s quando urta un'automobile di 800Kg ferma sulla strada. L'auto non ha attivato l'impianto frenante e dispone di un ottimo paraurti. Ritenendo l'urto perfettamente elastico, determinare le velocità con cui si muovono i due autoveicoli subito dopo l'urto.

Soluzione

Premessa

Il problema si risolve applicando il principio di conservazione della quantità di moto e quello di conservazione dell'energia meccanica. Infatti, i due autoveicoli costituiscono un sistema isolato e dunque nell'urto si conserva la quantità di moto; inoltre, avendo supposto l'urto elastico, si conserva anche l'energia meccanica.

Strategia risolutiva

Scriveremo le quantità di moto iniziale e finale e le uguaglieremo ottenendo una prima equazione; scriveremo le espressioni dell'energia cinetica prima dell'urto (data dalla sola energia cinetica del furgone) e dell'energia cinetica dopo l'urto (data dalla somma delle energie cinetiche dei due autoveicoli) e le uguaglieremo (conservazione dell'energia meccanica), otterremo una seconda equazione. Risolvendo il sistema composto dalla due equazioni suddette si troveranno i valori delle velocità dei due autoveicoli.

Utilizziamo i seguenti simboli

$\vec{V}_1$ Velocità del furgone prima dell'urto;

$\vec{V}_1\,'$ Velocità del furgone dopo l'urto;

$\vec{V}_2\,'$ Velocità dell'auto dopo l'urto;

m_1 massa del furgone;

m_2 massa dell'automobile

Sistema di riferimento

Per poter esprimere le grandezze vettoriali in gioco è necessario assumere un sistema di riferimento. Supponendo che l'urto avvenga centralmente, cioè che l'auto si trovi disposta "idealmente" secondo la direzione della velocità del furgone, il moto avverrà secondo la stessa direzione; è sufficiente pertanto adottare come riferimento un asse orientato parallelo e concorde con $\vec{V}_1$. In detto riferimento l'uguaglianza della quantità di moto è espressa dalla seguente equazione vettoriale

$$m_1\vec{V}_1 = m_1\vec{V}_1\,' + m_2\vec{V}_2\,' \qquad (1)$$

Della (1) scriviamo la forma scalare seguente

$$m_1V_1 = m_1V_1' + m_2V_2' \tag{1.1}$$

Osservazione_1

Nella (1.1) V_1', V_2' sono le componenti cartesiane scalari dei vettori velocità $\overrightarrow{V_1}', \overrightarrow{V_2}'$ ed a priori non se ne conosce il segno algebrico. La validità dell'equazione scritta è da verificare a posteriori, cioè dopo aver risolto il sistema di equazioni cui abbiamo fatto riferimento. Precisiamo che se i valori V_1', V_2' che si otterranno saranno positivi, vorrà dire che gli stessi vettori saranno concordi con il verso positivo adottato per l'asse reale di riferimento; se qualcuno dei due sarà negativo vorrà dire che l'autoveicolo corrispondente si muoverà nel verso opposto a quello considerato come positivo (per esempio, teoricamente potrebbe accadere che il furgone come effetto dell'urto rimbalzi all'indietro[(1)]).

La conservazione dell'energia meccanica nell'urto è espressa dalla seguente uguaglianza

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}m_1(V_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(V_2')^2 \text{ da cui } \; m_1V_1^2 = m_1(V_1')^2 + m_2(V_2')^2 \tag{2}$$

Si deve risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} m_1V_1 = m_1V_1' + m_2V_2' \\ m_1V_1^2 = m_1(V_1')^2 + m_2(V_2')^2 \end{cases} \tag{3}$$

Eseguiamo alcune elaborazioni algebriche

$$\begin{cases} m_1(V_1 - V_1') = m_2V_2' \\ m_1\left[V_1^2 - (V_1')^2\right] = m_2(V_2')^2 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} m_1(V_1 - V_1') = m_2V_2' \\ m_1(V_1 - V_1')(V_1 + V_1') = m_2(V_2')^2 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro le due equazioni e semplificando si ottiene

$$\frac{m_1\cancel{(V_1 - V_1')}(V_1 + V_1')}{m_1\cancel{(V_1 - V_1')}} = \frac{m_2(V_2')^2}{m_2V_2'}, \text{ quindi } \; V_1 + V_1' = V_2'$$

Il sistema (3) può essere sostituito dal seguente

$$\begin{cases} m_1(V_1 - V_1') = m_2V_2' \\ V_1 + V_1' = V_2' \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} m_1(V_1 - V_1') = m_2(V_1 + V_1') \\ V_1 + V_1' = V_2' \end{cases}, \begin{cases} V_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2} \\ V_1 + V_1' = V_2' \end{cases}, \text{ quindi}$$

$$\begin{cases} V_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2} \\ V_2' = V_1 + \dfrac{(m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{2m_1V_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

[(1)] In realtà, sviluppando i calcoli, si potrà osservare che se il furgone avesse massa minore dell'auto che tampona rimbalzerebbe all'indietro.

Osservazione_2

Dall'espressione di V_1' si evince che se $m_1 - m_2 < 0$, cioè se la massa del veicolo tamponante è minore della massa del veicolo tamponato, allora il veicolo tamponante rimbalza indietro.

Sostituendo alle grandezze i valori noti si ricavano i valori delle velocità dei due veicoli dopo l'urto:

$V_1' = \dfrac{(1800-800)\,Kg \cdot 10ms^{-1}}{(1800+800)\,Kg} \approx 3{,}8ms^{-1}$, velocità del furgone dopo l'urto;

$V_2' = \dfrac{2 \cdot 1800Kg \cdot 10ms^{-1}}{(1800+800)\,Kg} = 13{,}8ms^{-1}$; velocità acquistata dell'auto in seguito all'urto.