Conservazione dell'energia meccanica

Problema

Si lancia lungo un piano orizzontale liscio un blocco con velocità iniziale V=4,5m/s. A distanza di 3m dal punto di lancio, nella direzione del moto, inizia una pista inclinata di 30° rispetto al piano orizzontale lungo la quale il blocco è costretto a salire. Anche la superficie della pista è liscia. Risolvere i seguenti quesiti.

Q1-Precisare il tipo di moto del blocco finché permane sul piano orizzontale e scrivere la legge oraria della posizione. Calcolare dopo quanti secondi il blocco giunge alla base del piano inclinato.

Q2-Determinare l'altezza h rispetto al piano orizzontale che il blocco raggiunge sul piano inclinato e la lunghezza del percorso compiuto sulla pista inclinata. Scrivere le leggi orarie della velocità e della posizione del blocco durante la salita sul piano inclinato.

Q3- Rappresentare in opportuni sistemi di riferimento le leggi orarie della velocità e della posizione del blocco relativamente alla salita lungo il piano inclinato.

Soluzione

Q1- Il moto del blocco sul piano orizzontale è rettilineo uniforme. Posto $V_0 = 4,5\frac{m}{s}$ e assumendo per la descrizione del moto un asse di riferimento parallelo al piano del moto, orientato concordemente alla velocità, nonché ponendo t=0s l'istante di lancio del blocco, il valore x dell'ascissa della posizione nell'istante t è espressa dalla seguente legge: $x = V_0 t$.

Il numero di secondi impiegati dal blocco per giungere all'inizio della pista inclinata si ottiene risolvendo l'equazione $x=d=3\text{m}\rightarrow$

$$x = V_0 t = d \rightarrow \; t = \frac{d}{V_0} = \frac{3m}{4,5ms^{-1}} = \frac{2}{3}s \approx 0,67s$$

Q2- Il blocco sale lungo la pista inclinata per effetto dell'energia cinetica di cui è in possesso all'inizio della salita. Durante la salita l'energia cinetica si trasforma in energia potenziale gravitazionale. Assunto come livello zero per l'energia potenziale gravitazionale quello del piano orizzontale di riferimento, nell'istante in cui il blocco raggiungerà l'altezza h tutta la sua energia cinetica si sarà trasformata in energia potenziale. Pertanto sussiste l'uguaglianza:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = mgh\,, \qquad \text{dalla quale si ha} \qquad h = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{\left(4,5ms^{-1}\right)^2}{2 \cdot 9,81ms^{-2}} \approx 1,032m$$

Lunghezza del percorso sulla pista inclinata

Poiché la pista è inclinata sul piano orizzontale di 30°, la lunghezza l del percorso è

$$l = \frac{h}{sen30°} = \ 2h \approx 2,064m\,.$$

Espressioni delle leggi orarie in salita

Il moto in salita è uniformemente decelerato. Infatti l'accelerazione $a=g\cdot$sen30° è costante ma si oppone al moto. Assumendo per la descrizione un asse orientato parallelo al piano della pista inclinata ed orientato concordemente al vettore velocità iniziale e con origine per le ascisse coincidente con la base del piano inclinato, le leggi orarie della velocità e della posizione sono rispettivamente:

$$V = V_0 - at\,, \quad (1) \qquad x = -\frac{1}{2}at^2 + V_0 t \qquad (2)$$

Il parametro t che esprime il tempo in secondi varia da zero all'istante t_f di arresto del blocco; il valore di questo istante si ricava sfruttando la legge oraria della velocità ponendo V=0.

$$V = V_0 - at = 0 \rightarrow \ t = \frac{V_0}{a} = \ \frac{4,5ms^{-1}}{9,81ms^{-2}\cdot\frac{1}{2}} \approx \ 0,917s\,.$$

Le due leggi orarie sono:

$$V = 4,5 - gsen30°t\,, \quad x = -\frac{9,81}{2}t^2 + 4,5t\,, \text{ con } 0 \le t \le 0,917(s)\,.$$

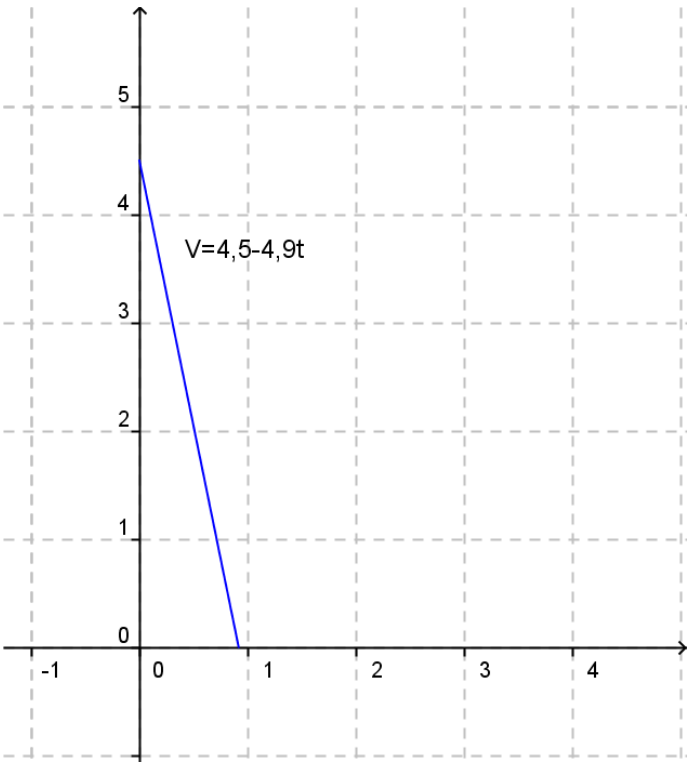


Figura 1-Grafico della velocità- Formula utilizzata: Curva[t, 4.5 - 9.81 / 2 t, t, 0, 0.917]

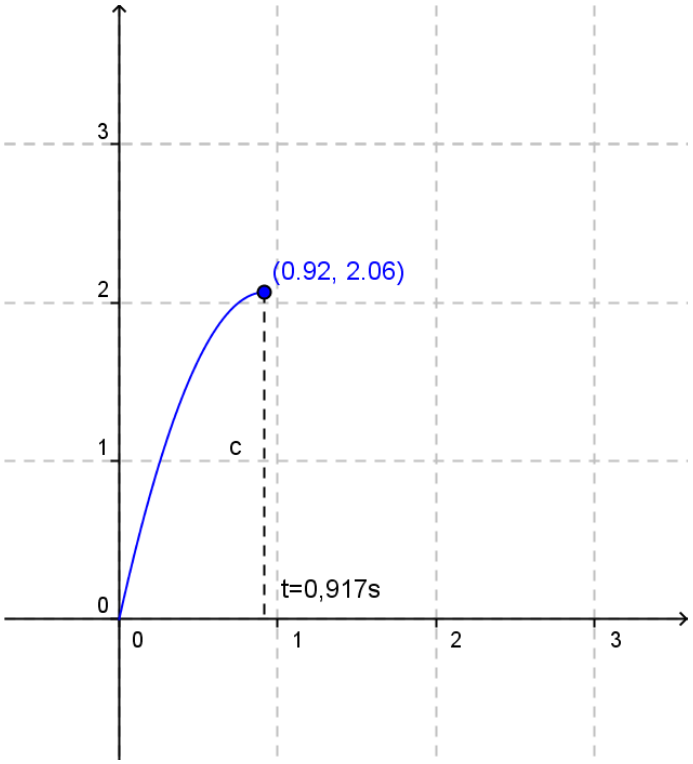


Figura 2-Grafico della posizione. Formula utilizzata: Curva[t, -(9.81) /4 t² + 4.5 t, t, 0, 0.917]