Conservazione dell'energia meccanica

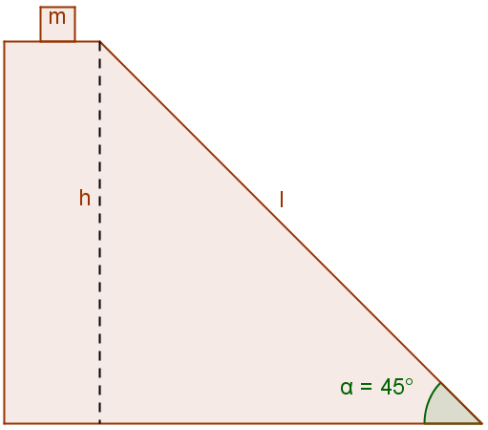
Problema

Un blocco avente massa m=1,2Kg si trova su un piano rialzato, raccordato con il piano orizzontale con un piano inclinato di 45° lungo *l*=2,5m (vedi figura). Le superfici dei due piani sono lisce.

Q1- Assumendo un opportuno sistema di riferimento, determinare l'energia potenziale gravitazionale del blocco.

Q2- Si lascia scivolare il blocco lungo il piano con velocità iniziale nulla. Calcolare il modulo della velocità con cui il blocco giunge alla base del piano inclinato.

Q3- Assunto il blocco come punto materiale, scrivere la legge oraria della velocità e quella della posizione durante la discesa e determinare il tempo necessario per la discesa.



Soluzione

Q1- Assumendo come livello zero per l'energia potenziale gravitazionale quello del piano orizzontale di riferimento, e detta *h* l'altezza del piano rialzato su cui poggia il blocco inizialmente, l'energia potenziale di cui il blocco è in possesso è $U_g=mgh$, essendo $g=9{,}81 ms^{-2}$ l'accelerazione di gravità.

Poiché il piano inclinato forma un angolo di 45° con il piano orizzontale deduciamo che l'altezza $h=l\text{sen}45°\rightarrow$

$$h = l\text{sen}45° = 2{,}5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}m \approx 1{,}77m \rightarrow U_g = mgh = 1{,}2Kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}77m = 20{,}84J$$

Q2- Il moto lungo il piano inclinato avviene perché il blocco è soggetto alla sua forza peso che è conservativa. Sul blocco agisce anche la forza di reazione vincolare che è perpendicolare punto per punto al piano inclinato nella posizione occupata dal blocco. Ciò si verifica perché il piano inclinato è supposto liscio e quindi tra le due superfici a contatto non vi è attrito. La forza di reazione vincolare durante il moto compie lavoro nullo sul blocco. Nella discesa l'energia meccanica gravitazionale si trasforma in energia cinetica. Quando il blocco giunge alla base del piano inclinato tutta l'energia potenziale è stata trasformata in energia cinetica, per cui, detto V_f il modulo della velocità alla base del piano, sussiste l'uguaglianza:

$$\frac{1}{2}mV_f^2 = mgh \rightarrow V_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}77m} \approx 5{,}89\frac{m}{s}.$$

Q3- Assumiamo come asse di riferimento una retta parallela al piano inclinato e orientata concordemente al vettore velocità, con origine nella posizione iniziale del blocco alla vetta del piano inclinato. Nella discesa il moto è uniformemente accelerato con accelerazione in modulo uguale alla componente dell'accelerazione di gravità lungo il piano inclinato, dunque: $a=g\cdot sen45°$.

Assumendo come istante iniziale t=0s l'istante in cui inizia la discesa del blocco si ha:

$V = at$ come legge oraria della componente scalare della velocità lungo l'asse di riferimento;

$x = \frac{1}{2}at^2$ è l'ascissa della posizione istante per istante.

$V = gsen45°t = 6,94t\left(m/s\right);$ $x = \frac{1}{2}\cdot gsen45°\cdot t^2 = 3,47\cdot t^2.$

Calcolo del tempo necessario per la discesa

La durata della discesa è rappresentata dal valore dell'istante in cui il blocco giunge alla base del piano inclinato e questo valore si ottiene ponendo $x=l$ nella legge oraria della posizione.

$$x = \frac{1}{2}at^2 = l \rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{gsen45°}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2,5m}{9,81\frac{m}{s^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}} \approx 0,849s$$