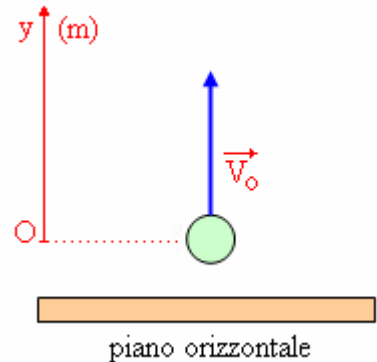


Moto di un grave

Pierino gioca con una biglia di vetro lanciandola lungo la verticale ed osserva che raccoglie la biglia nella stessa posizione da cui effettua il lancio dopo 1,2s. Adottando un opportuno sistema di riferimento spazio-temporale e trascurando la resistenza dell'aria, risolvere i quesiti che seguono.

- 1) Scrivere le espressioni analitiche delle leggi della velocità e della posizione durante il volo della biglia.
- 2) Determinare il modulo della velocità di lancio della biglia.
- 3) Determinare l'altezza massima raggiunta dalla biglia.
- 4) Determinare il valore della velocità della biglia negli istanti $t_1=0,4s$, $t_2=0,8s$; $t_3=1,2s$, precisando se negli stessi la biglia è in salita o in discesa.
- 5) Rappresentare nel piano cartesiano (t;V) la legge oraria della velocità della biglia nell'intervallo di tempo $[0;1,2](s)$.



Soluzione

Facciamo riferimento al disegno rappresentato nella figura a lato.

- 1) Indicando con V_0 il modulo della velocità di lancio della biglia, considerato che il vettore è concorde con il verso positivo scelto per l'asse verticale di riferimento, trattandosi di un moto ad accelerazione costante il cui modulo è $g=9,81ms^{-2}$ e supponendo di porre $t=0s$ l'istante di lancio, la legge oraria della componente cartesiana scalare della velocità durante tutto il volo è

$$V = V_0 - gt \quad (1.1)$$

La legge oraria della posizione (quota) della biglia, avendo assunto nel disegno uguale a zero la quota di lancio, è la seguente

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t \quad (1.2)$$

- 2) Dobbiamo determinare l'istante in cui la biglia è raccolta da Pierino; questo istante, avendo azzerato il tempo nell'istante di lancio, evidentemente rappresenta anche la durata del volo della biglia (t_{volo}). Il testo del problema fornisce il tempo di volo, pari a 1,2s. Ponendo nella (1.2) $y=0$ (m) si ottiene un'equazione di secondo grado le cui radici rappresentano gli istanti in cui la pallina è a quota zero. Il primo istante, $t_1=0s$ rappresenta l'istante di lancio, il secondo valore t_2 è quello in cui la biglia è raccolta da Pierino. Uguagliando t_2 al tempo di volo si determinerà il modulo della velocità di lancio.

$$-\frac{1}{2}gt^2 + V_0t = 0 \Leftrightarrow t \left(-\frac{1}{2}gt + V_0 \right) = 0 \Rightarrow t_1 = 0s, t_2 = \frac{2V_0}{g} = t_{volo} = 1,2s \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{gt_{volo}}{2} = \frac{9,81ms^{-2} \cdot 1,2s}{2} \approx 5,89 \frac{m}{s}$$

- 3) Nell'istante in cui la biglia raggiunge la massima altezza la velocità della biglia è nulla. Ponendo uguale a zero l'espressione della velocità fornita dalla (1.1) si determina l'istante in cui l'evento si verifica. Si ha

$$V_0 - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0}{g} \quad (1.3)$$

Si osserva che il tempo necessario per raggiungere l'altezza massima è uguale alla metà del tempo di volo complessivo, dunque $t=0,6s$. Sostituendo questo valore nella (1.2) si

determina la quota massima. E' interessante sostituire nella (1.2) l'espressione dell'istante in cui si raggiunge la massima altezza in funzione della velocità iniziale e dell'accelerazione di gravità espressa dalla (1.3) al fine di dedurre la forma analitica del valore della quota massima in funzione delle due grandezze suddette. Con semplici elaborazioni algebriche si ricava:

$$y_{\max} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0 \cdot \frac{V_0}{g} = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{(5,89)^2 m^2 s^{-2}}{2 \cdot 9,81 m s^{-2}} \approx 1,77 m$$

- 4) E' noto dalla teoria che il moto della biglia presenta delle caratteristiche di simmetria. Detta P una qualsiasi posizione occupata dalla biglia lungo la verticale, quando la biglia transita per P, sia in salita che in discesa, la velocità di cui è in possesso ha lo stesso modulo. In virtù di quanto esposto nel precedente punto 3) possiamo affermare che nell'istante $t_1=0,4s$, la biglia è in salita, nell'istante $t_2=0,8s$ è in discesa e nell'istante $t_3=1,2s$ la biglia termina il volo, ossia ritorna nella mano di Pierino. Nell'istante $t_3=1,2s$ dunque la quota è zero metri. I valori richiesti per la velocità negli istanti indicati si ottengono sostituendoli ordinatamente nella legge oraria delle velocità $V = 5,89 - 9,81t$ alla t . Si ha:

$$t = 0,4s \Rightarrow V = 1,97 \frac{m}{s} \Rightarrow \text{la biglia è in salita;}$$

$$t = 0,8s \Rightarrow V = -1,97 \frac{m}{s} \Rightarrow \text{la biglia è in discesa;}$$

$$t = 1,2s \Rightarrow V = -5,89 \frac{m}{s} \Rightarrow \text{la biglia ritorna nella mano di Pierino.}$$

Riportiamo anche i valori delle quote della biglia negli stessi istanti.

$$\left(\begin{array}{l} t_1 = 0,4s \\ y = -4,91t^2 + 5,89t \end{array} \right) \Rightarrow y_1 = 1,57m ; \left(\begin{array}{l} t_2 = 0,8s \\ y = -4,91t^2 + 5,89t \end{array} \right) \Rightarrow y_2 = 1,57m ;$$

$$\left(\begin{array}{l} t_3 = 1,2s \\ y = -4,91t^2 + 5,89t \end{array} \right) \Rightarrow y_3 = 0m \quad (\text{la biglia ritorna nella mano di Pierino}).$$

- 5) La rappresentazione cartesiana della legge oraria della velocità durante il moto è riportata a fianco.

