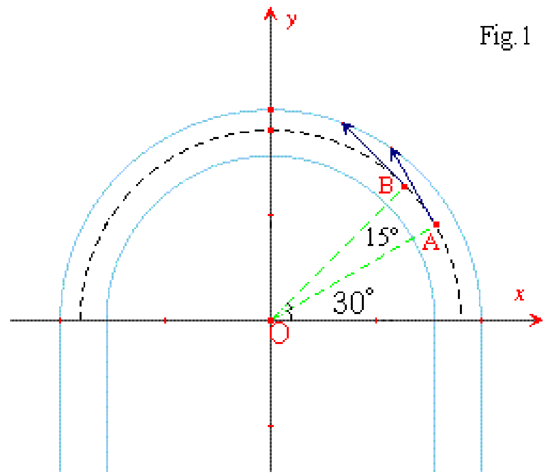
Moto circolare



Problema- Un'auto percorre una strada con velocità di 90 Km/h allorquando deve affrontare una curva semicircolare di raggio 50m. Nella figura riportata sono indicate le posizioni A e B corrispondenti agli istanti in cui il vettore posizione dell'auto forma un angolo di 30° (punto A) ed un angolo di 45° (punto B) con la perpendicolare alla retta della strada nel punto in cui inizia la curva.

1. Determinare il modulo V della velocità dell'auto nel S.I.
2. Precisare la direzione del vettore accelerazione istantanea dell'auto quando affronta la curva e determinarne il modulo.
3. Scrivere le espressioni cartesiane del vettore velocità nelle posizioni A e B.
4. Determinare l'espressione cartesiana del vettore accelerazione media relativamente all'intervallo $[t_A; t_B]$, essendo t_A, t_B gli istanti nei quali l'auto si trova in A e B rispettivamente. Determinare il modulo del vettore accelerazione media e confrontarlo con il modulo dell'accelerazione istantanea trovato nel precedente punto 1.2.

Soluzione

1. Nel sistema internazione (S.I.) la velocità si esprime in metri al secondo. Il modulo della velocità dell'auto è
$$V = 90\frac{Km}{h} = 90\cdot\frac{1000m}{3600s} = 25\frac{m}{s}$$
2. Nell'ipotesi che l'auto affronti la curva con velocità in modulo costante, il moto è circolare uniforme. Il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria punto per punto ed il vettore accelerazione istantanea è diretto verso il centro della semicirconferenza; il modulo dell'accelerazione è
$$a = \frac{V^2}{r} = \frac{\left(25ms^{-1}\right)^2}{50m} = 12,5\frac{m}{s^2}$$
3. **Espressioni cartesiane dei vettori velocità**.
Nel riferimento cartesiano adottato ed indicato in Fig.1, quando l'auto è nella posizione A il vettore velocità forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse un angolo di ampiezza 120° e dunque, indicando con $\vec{i}$, $\vec{j}$ i versori associati agli assi e con V il modulo della velocità si ha:
$$\overrightarrow{V_A} = V\cos 120°\vec{i} + Vsen120°\vec{j} = \frac{V}{2}\left(-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}\right)$$
Quando l'auto si trova nella posizione B il vettore velocità forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse un angolo di 135° e la sua espressione cartesiana è
$$\overrightarrow{V_B} = V\cos 135°\vec{i} + Vsen135°\vec{j} = \frac{V}{2}\left(-\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}\right)$$
4. Per definizione il vettore accelerazione media relativamente all'intervallo di tempo indicato è dato dal rapporto tra la variazione di velocità verificatasi nell'intervallo e la misura dell'intervallo stesso. Poiché abbiamo già le espressioni cartesiane dei vettori velocità nelle due posizioni possiamo determinare il vettore variazione di velocità: $\Delta\vec{V} = \overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}$. Si ha

$\Delta\vec{V} = \vec{V_B} - \vec{V_A} \;= \frac{V}{2}\left(-\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}\right) - \frac{V}{2}\left(-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}\right) \;= \frac{V}{2}\left[\left(-\sqrt{2}+1\right)\vec{i} + \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\vec{j}\right]$

$= -5{,}175\vec{i} - 3{,}975\vec{j}$ (m/s).

Occorre a questo punto determinare l'ampiezza dell'intervallo di tempo in cui l'auto si sposta dalla posizione A alla posizione B, ovvero il valore $\Delta t = t_B - t_A$. All'uopo osserviamo che questo valore si può ottenere dal rapporto tra la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ di circonferenza ed il modulo V della velocità.

Indicando con $\boldsymbol{l}$ la misura di un arco di circonferenza di raggio $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{\theta}$ la misura dell'angolo al centro corrispondente espressa in radianti, sussiste la relazione $\boldsymbol{l=r\theta}$. Risultando

$\theta = \frac{\pi}{180°} \cdot 15° = \frac{\pi}{12}$ deduciamo che $l\left(\overset{\frown}{AB}\right) = r\theta = r \cdot \frac{\pi}{12}$, con r =50m.

Dalla relazione $l\left(\overset{\frown}{AB}\right) = V \cdot \Delta t$ segue l'uguaglianza

$$V \cdot \Delta t = r\theta \Rightarrow \Delta t = \frac{r\theta}{V} = 50m \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{25ms^{-1}} = 0{,}52s$$

Il vettore accelerazione media è

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = -\frac{5{,}175}{0{,}52}\vec{i} - \frac{3{,}975}{0{,}52}\vec{j} = -9{,}95\vec{i} - 7{,}64\vec{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

il cui modulo è

$a_m = \sqrt{(-9{,}95)^2 + (-7{,}64)^2}\,\frac{m}{s^2} = 12{,}54\frac{m}{s^2}$

Osservazione

Il valore del modulo dell'accelerazione media è molto vicino a quello dell'accelerazione istantanea calcolato nel punto 1.2;ciò è dovuto al fatto che l'intervallo di tempo considerato è "abbastanza piccolo".