Centro di Massa di un Sistema di due Particelle Puntiformi

Applicazione dell'algebra lineare

Problema

Date due masse puntiformi m_1, m_2, collocate nei punti P_1, P_2, e detti $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ i rispettivi vettori di posizione, indicato con C il loro centro di massa, definito da

$$\vec{r_C} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

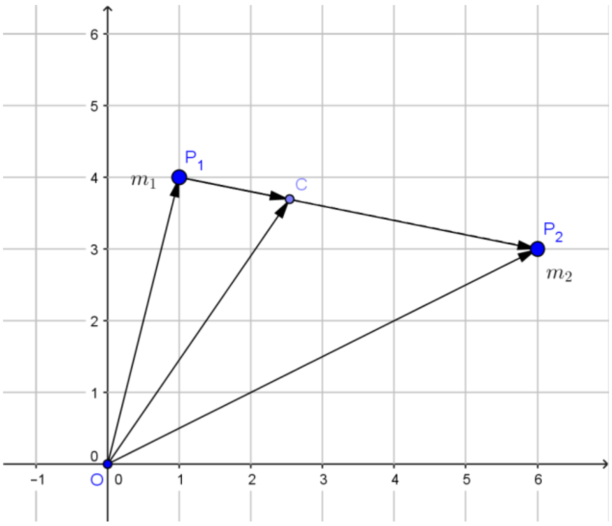
dimostrare che il punto C appartiene al segmento P_1P_2.

Soluzione

Premessa

Le due masse puntiformi m_1, m_2, come grandezze scalari sono positive e occupano "idealmente" nello spazio fisico i due punti P_1, P_2. Anche il centro di massa del sistema formato dalle due particelle, e in genere il centro di massa di un qualsiasi sistema di n particelle (o di un corpo qualsiasi), è un punto ideale dello spazio. Nel caso specifico la posizione del centro C di massa delle due particelle è definito dalla relazione (1), nella quale i vettori sono riferiti ad un ben preciso sistema di riferimento nello spazio fisico. Per dimostrare che il centro di massa C appartiene al segmento P_1P_2 consideriamo un punto qualsiasi O non appartenente alla retta [P_1; P_2] e il piano α contenente O e detta retta, quindi fissiamo in esso il sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, con i versori associati ai due assi x, y, rispettivamente $\vec{i}, \vec{j}$. Proveremo che il punto C appartiene al segmento P_1P_2 dimostrando le due seguenti proprietà:

1. il vettore $\overrightarrow{P_1C}$ è parallelo al vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$;
2. il punto C ha ascissa compresa tra l'ascissa di P_1 e l'ascissa di P_2; analogamente C ha ordinata compresa tra l'ordinata di P_1 e l'ordinata di P_2.



Dimostrazione

Siano $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ i due punti nel piano cartesiano occupati dalle particelle m_1, m_2. I loro vettori posizione nel sistema di riferimento cartesiano scelto hanno le seguenti espressioni

$$\vec{r_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \ \vec{r_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \tag{2}$$

Per la definizione (1) il vettore posizione $\vec{r_C}$ del centro di massa in oggetto ha espressione

$$\vec{r_C} = \frac{1}{m_1+m_2}\cdot\left[m_1\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)+m_2\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)\right] = \left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\right)\vec{i}+\left(\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)\vec{j} \qquad (3)$$

Espressione del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j} \qquad (4)$$

Espressione del vettore $\overrightarrow{P_1C}$

$$\overrightarrow{P_1C} = \left(x_C-x_1\right)\vec{i}+\left(y_C-y_1\right)\vec{j} = \left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}-x_1\right)\vec{i}+\left(\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}-y_1\right)\vec{j} = \ldots =$$
$$\frac{m_2\left(x_2-x_1\right)}{m_1+m_2}\vec{i}+\frac{m_2\left(y_2-y_1\right)}{m_1+m_2}\vec{j} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left[\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}\right] \qquad (5)$$

Osserviamo che risulta

$$\overrightarrow{P_1C} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{P_1P_2} \qquad (6)$$

Ricordiamo ora che due **vettori** $\vec{u},\vec{v}$ sono **paralleli** se e solo se le loro **componenti scalari cartesiane sono proporzionali**, quindi se esiste uno scalare $\lambda\neq 0$ in modo che risulti

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \qquad (7)$$

Ebbene, la sussistenza della relazione (6), con $\lambda = \frac{m_2}{m_1+m_2}$, prova che i vettori $\overrightarrow{P_1C}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, sono paralleli.

Proviamo ora che C è compreso tra P_1 e P_2. Nella dimostrazione supponiamo che

$$x_1 < x_2 \qquad (8)$$

Così come risulta nella figura illustrativa. Dobbiamo provare che sussiste la doppia disuguaglianza

$$x_1 < x_C < x_2, \quad \text{cioè} \quad x_1 < \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} < x_2 \qquad (9)$$

$\Leftrightarrow$ [1] $\left(m_1+m_2\right)x_1 < m_1x_1+m_2x_2 < \left(m_1+m_2\right)x_2$, quindi deve sussistere il sistema

$$\begin{cases}\left(m_1+m_2\right)x_1 < m_1x_1+m_2x_2 \\ m_1x_1+m_2x_2 < \left(m_1+m_2\right)x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cancel{m_1x_1}+m_2x_1 < \cancel{m_1x_1}+m_2x_2 \\ m_1x_1+\cancel{m_2x_2} < m_1x_2+\cancel{m_2x_2}\end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases}m_2x_1 < m_2x_2 \\ m_1x_1 < m_1x_2\end{cases}$$

[1] Si ricordi che $m_1>0$, $m_2>0$, quindi $m_1+m_2>0$

Semplificando ora le costanti positive m_1, m_2, si perviene alle relazioni $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 \end{cases}$, che rappresentano l'ipotesi (8). Dunque la doppia disuguaglianza è vera.

Volendo provare che l'ordinata di C è compresa tra l'ordinata di P_1 e l'ordinata di P_2 si procede nello stesso modo. Dalla figura riportata sopra si evince che abbiamo supposto che sia

$$y_1 > y_2 \qquad (10)$$

Proviamo che l'ordinata di C verifica la doppia disuguaglianza

$$y_1 > y_C > y_2 \text{, cioè} \qquad y_1 > \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} > y_2 \qquad (11)$$

Otteniamo[2] $(m_1 + m_2) y_1 > m_1 y_1 + m_2 y_2 > (m_1 + m_2) y_2$, quindi il sistema

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) y_1 > m_1 y_1 + m_2 y_2 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 > (m_1 + m_2) y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{m_1 y_1} + m_2 y_1 > \cancel{m_1 y_1} + m_2 y_2 \\ m_1 y_1 + \cancel{m_2 y_2} > m_1 y_2 + \cancel{m_2 y_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_2 y_1 > m_2 y_2 \\ m_1 y_1 > m_1 y_2 \end{cases}$$

e le due disuguaglianze sono vere, data la verità della (10).

A questo punto si può concludere che C è un punto del segmento P_1P_2.

Osservazione

Facciamo notare esplicitamente che il punto C è un punto interno del segmento P_1P_2.

[2] Vedere precedente nota (1)