Esercizio sui vettori

(vettori complanari, componenti cartesiane, prodotto misto)

Considerati nello spazio i vettori

$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\quad \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\quad \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

dimostrare che formano un triangolo rettangolo.

Elaborazioni

Strategia risolutiva

Occorre provare che i tre vettori sono i lati di un triangolo rettangolo, quindi che due dei vettori sono tra loro ortogonali e che i vettori sono complanari. Determineremo i moduli dei singoli vettori e verificheremo che gli stessi verificano la relazione pitagorica, quindi che i vettori possono essere i lati di un triangolo rettangolo. Proveremo poi che i vettori sono complanari utilizzando il prodotto misto.

1) Moduli dei vettori.
   a) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
   b) $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{35}$
   c) $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$

   Osserviamo che i moduli dei tre vettori, considerati come lati del triangolo da essi costruito, verificano la relazione pitagorica

   $$\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{14}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2 = \left(\sqrt{35}\right)^2 \Leftrightarrow 14 + 21 = 35.$$

2) Ricordando la proprietà del prodotto scalare di due vettori, che può essere espresso tramite le componenti cartesiane scalari degli stessi, possiamo riconoscere che effettivamente i vettori $\vec{a}$ e $\vec{c}$ sono ortogonali. Infatti risulta:

   $$\vec{a} \cdot \vec{c} = \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \left(2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}\right) = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 6 - 2 - 4 = 0;$$

   d'altra parte, per definizione il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli per il coseno di uno degli angoli formati dagli stessi

   $\vec{a} \cdot \vec{c} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\theta$, da cui ricaviamo $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} = \dfrac{0}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} = 0$,

   quindi deve risultare $(\theta = 90°) \vee (\theta = 270°)$.

3) Proviamo che i tre vettori sono complanari facendo vedere che il loro prodotto misto $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ è nullo.

Ricordiamo che nel prodotto misto di tre vettori, nessuno dei quali sia il vettore nullo,

- vi è un prodotto vettoriale ed un prodotto scalare;
- Il risultato del prodotto misto è uno scalare e numericamente rappresenta il volume del parallelepipedo di cui tre spigoli sono rappresentati dai vettori e il risultato del prodotto misto non dipende dall'ordine con cui sono presi i tre vettori per comporre il prodotto misto;
- il prodotto misto di tre vettori tutti diversi dal vettore nullo è uguale a zero se e solo se i vettori sono complanari.

Per il calcolo del prodotto misto $\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ calcoliamo prima il prodotto vettoriale $\vec{a}\wedge\vec{b}$, quindi il prodotto scalare tra il vettore risultato ottenuto e il vettore $\vec{c}$.

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 5\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\left(-10+3\right)\cdot\vec{i}-\left(15-1\right)\cdot\vec{j}+\left(-9+2\right)\cdot\vec{j}=-7\vec{i}-14\vec{j}-7\vec{j}$$

Eseguiamo ora il prodotto scalare

$$\left(-7\vec{i}-14\vec{j}-7\vec{j}\right)\cdot\vec{c}=\left(-7\vec{i}-14\vec{j}-7\vec{j}\right)\cdot\left(2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}\right)=-7\cdot 2+\left(-14\right)\cdot 1+\left(-7\right)\cdot\left(-4\right)=-14-14+28=0$$

I vettori sono dunque complanari.

Osserviamo infine che sussiste l'uguaglianza

$$\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}\right)+\left(2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}\right)=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}=\vec{a}$$

I vettori possono essere effettivamente pensati come lati di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è rappresentata dal vettore $\vec{b}$.