Lancio di un proiettile da una terrazza

Problema

Pierino si trova sulla terrazza della propria abitazione che è separata dai giardini pubblici da una strada. A distanza 16m dalla verticale della facciata dell'abitazione si trova nei giardini pubblici una striscia di pini alti 15m che corre parallelamente alla strada; la striscia coperta dalle chiome è larga 10m. Pierino si dota di una fionda con cui lancia dei sassolini cercando di superare la barriera di pini. Effettua tre lanci in direzione perpendicolare alla barriera di pini da un punto che rispetto al piano orizzontale della strada e dei giardini pubblici si trova a quota h=5m. La velocità con cui riesce a lanciare ogni sassolino è di 20m/s. Orienta verso l'alto la fionda ed effettua i lanci scegliendo come angoli di alzo rispetto al piano orizzontale le ampiezze di 30°, 45°, 60°.

Stabilire se Pierino riesce a superare la barriera dei pini con i lanci che effettua e in caso affermativo a quale distanza dalla verticale del punto di lancio cade il sassolino, in caso negativo determinare la quota del punto in cui il sassolino incontra la barriera di alberi.

Nei casi in cui il sassolino superi la barriera di alberi determinare modulo e direzione della velocità finale con cui il sassolino tocca il suolo.

Risposte

Pierino riesce a superare la striscia di alberi solo con il lancio con angolo di alzo α=60°

Distanza (gittata): d=38,0m. V_f=22,3m/s.

La velocità finale forma con il piano del suolo un angolo di 63°23' sotto l'orizzontale.

Soluzione

Per la risoluzione del problema, per i tre lanci, scegliamo un sistema di riferimento cartesiano xOy con l'asse delle ordinate coincidente con la verticale del punto di lancio, orientato verso l'alto e origine sul piano orizzontale del suolo, l'asse delle ascisse nel piano determinato dall'asse delle ordinate e dal vettore velocità iniziale dei sassolini; poniamo inoltre t=0s come istante di lancio.

Indichiamo con α l'ampiezza dell'angolo che il vettore velocità $\vec{V_0}$ iniziale di ogni sassolino forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse (Fig.1); vettorialmente risulta

$$\vec{V_0} = V_{0x}\vec{i} + V_{0y}\vec{j} = V_0 \cos\alpha\vec{i} + V_0 sen\alpha\vec{j}\ .$$

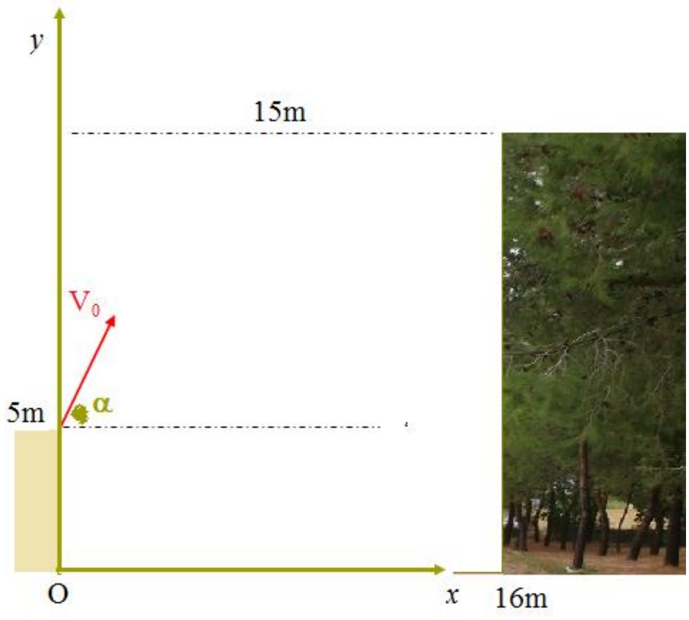

Figura 1

Le leggi orarie delle componenti cartesiane scalari della velocità istantanea del proiettile sono

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = V_0 sen\alpha - gt \end{cases} \qquad (1)$$

Con y_0 quota di lancio del proiettile, le leggi orarie delle coordinate del punto materiale in movimento sono

$$\begin{cases} x(t) = V_{0x} t = V_0 \cos\alpha t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_{0y} t + y_0 \end{cases} \text{,da cui} \begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 sen\alpha t + y_0 \end{cases}, \qquad (2)$$

con il parametro temporale t che varia tra zero secondi e l'istante in cui finisce il volo,t_{volo}, da determinare per ciascuno dei tre lanci.

Ricerca dell'equazione cartesiana della traiettoria del proiettile

Le (2) rappresentano le equazioni parametriche della traiettoria descritta; eliminando il parametro t si ricava l'equazione cartesiana. Si ha

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha} \\ y = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{V_0 \cos\alpha} \right)^2 + V_0 sen\alpha \cdot \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha} + y_0 \end{cases} \text{, da cui}$$

$$\gamma : y = -\frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2\alpha} + tg\alpha \cdot x + y_0 \qquad (3)$$

Calcoliamo la quota del proiettile quando si trova sulla verticale per x=16m nei tre lanci.

$$\alpha = 30° \to \quad y = \left(-\frac{9{,}81 \cdot 16^2}{2 \cdot 20^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 16 + 5 \right) m \approx 10{,}06 m\,;$$

in questo caso il proiettile finisce nella barriera di pini;

$$\alpha = 45° \to y = \left(-\frac{9{,}81 \cdot 16^2}{2 \cdot 20^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} + 1 \cdot 16 + 5 \right) m \approx 14{,}72 m$$

anche in questo caso il proiettile finisce nella barriera di pini;

$$\alpha = 60° \to y = \left(-\frac{9{,}81 \cdot 16^2}{2 \cdot 20^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2} + \sqrt{3} \cdot 16 + 5 \right) m \approx 20{,}16 m$$

in questo caso quando il proiettile si trova sulla verticale dove inizia la barriera di pini è al di sopra degli alberi di 5,16m; è necessario precisare se il proiettile è in salita o in discesa per capire cosa succederà subito dopo.

Calcoliamo la componente verticale della velocità nell'instante in cui il proiettile si trova sulla verticale x=16m; se risulta $V_y>0$ il proiettile è in salita.

Osserviamo che l'istante richiesto lo ricaviamo dalla legge oraria dell'ascissa ponendo x=16m e $\alpha=60°$. Risulta

$$t_1 = \frac{16m}{20ms^{-1}\cos 60°} = 1{,}6s \rightarrow V_y = V_0 sen\alpha - gt = \left(20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 9{,}81\cdot 1{,}6\right)\frac{m}{s} \approx 1{,}62\frac{m}{s}$$

Poiché all'inizio della barriera di pini la componente cartesiana verticale della velocità è positiva si deduce che proiettile in quell'istante è in salita. Il proiettile non ha ancora raggiunto la quota massima (pari a 20,29m, come indicato in Fig.2). Calcoliamo la quota del proiettile quando sarà sulla verticale per x=26m.

$$\alpha = 60° \rightarrow y = \left(-\frac{9{,}81\cdot 26^2}{2\cdot 20^2\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{3}\cdot 26 + 5\right)m \approx 16{,}88m$$

Alla fine della barriera di pini il proiettile si trova al di sopra degli alberi di circa 1,88m (ed è in discesa). Quindi con l'angolo di alzo α=60° il proiettile supera la barriera degli alberi.

Individuazione del punto di atterraggio del proiettile e della velocità finale

Possiamo determinare il punto di atterraggio del proiettile ponendo y=0m nell'equazione cartesiana della traiettoria e risolvendo l'equazione nell'incognita x. Si ha

$$\begin{cases} y = 0m; \alpha = 60°; y_0 = 5m; V_0 = 20m/s \\ \gamma : y = -\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} + tg\alpha\cdot x + y_0 \end{cases} \rightarrow -\frac{9{,}81x^2}{2\cdot 400\cdot\frac{1}{4}} + \sqrt{3}\cdot x + 5 = 0 \rightarrow \frac{9{,}81x^2}{200} - \sqrt{3}\cdot x - 5 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3 + 20\cdot\frac{9{,}81}{200}}}{2\cdot\frac{9{,}81}{200}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3{,}981}}{0{,}0981}m \approx 38{,}0m$$

Istante in cui il proiettile tocca il suolo

$$t_{volo} = \frac{x_{finale}}{V_0\cos 60°} = \frac{38{,}0m}{20ms^{-1}\cdot 0{,}5} \approx 3{,}8s$$

Componenti della velocità nell'istante di impatto con il suolo

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = V_0 sen\alpha - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_x = 20 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{m}{s}\right) \\ V_y = 20 \cdot \left(\frac{m}{s}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - 9{,}81\left(\frac{m}{s^2}\right) \cdot 3{,}8s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_x = 10\left(\frac{m}{s}\right) \\ V_y = -19{,}96\left(\frac{m}{s}\right) \end{cases}$$

Modulo della velocità finale

$$V_f = \sqrt{10^2 + (-19{,}96)^2}\left(\frac{m}{s}\right) \approx 22{,}32\left(\frac{m}{s}\right)$$

Angolo θ formato dal vettore velocità finale con l'asse delle ascisse sotto il piano orizzontale

$tg\theta = \frac{|V_y|}{V_x} = 1{,}996$, da cui $\theta = arctg(1{,}996) \approx 63°23'$

Rappresentazione grafica delle traiettorie nei tre lanci

In Figura 2 sono rappresentate le traiettorie che sarebbero state descritte dai proiettili in assenza della barriera di pini nei tre lanci effettuati, nell'ordine con angoli di alzo 30°, 45°, 60°, indicate rispettivamente con γ_1, γ_2, γ_3. Le prime due sono tratteggiate. Nella stessa figura è indicato il rettangolo ABCD, intersezione del piano del volo dei proiettili con la barriera dei pini. E' evidente come i primi due sassolini urtino la barriera di alberi sul lato iniziale AD, terminando quindi il rispettivo volo. Il proiettile del terzo lancio supera abbondantemente la barriera di alberi e raggiunge la quota massima di 22,29m.

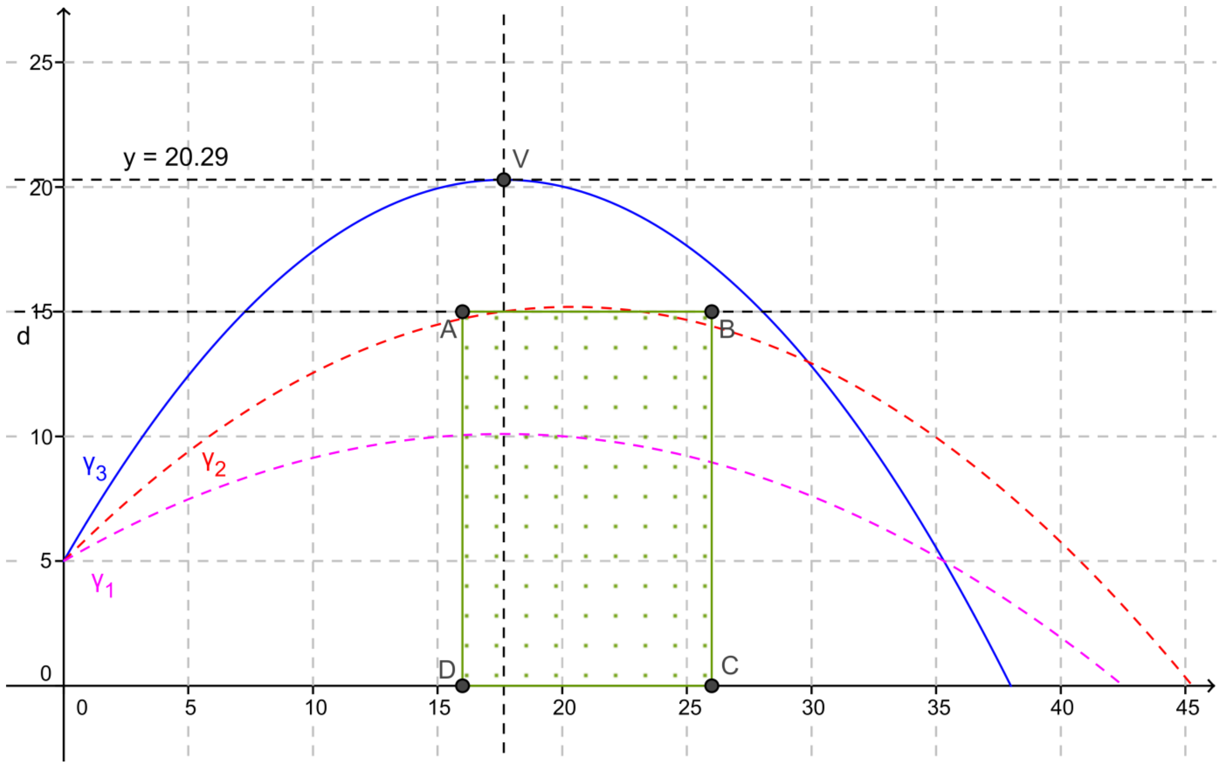

Figura 2-Il proiettile lanciato con angolo di alzo 60° cade a distanza di 38m

dalla verticale del punto di lancio. La traiettoria descritta è in colore blu.