Moti relativi

Determinare la rotta giusta per il volo di un aereo

Problema

Un aereo parte dalla località A e deve dirigersi nella località B situata a 800 Km di distanza in linea d'aria da A verso Nord. La velocità dell'aereo rispetto all'aria è di 600 Km/h. Durante il volo soffia da Nord-Ovest un vento con velocità 120 Km/h.

Quesiti

1) Il pilota intende procedere con il volo in linea retta per arrivare esattamente nella località di destinazione. Determinare l'angolo che la direzione della rotta deve formare con la direzione A-Nord.
2) Calcolare la durata del volo dell'aereo supponendo che la velocità rispetto al suolo sia costante.

Risoluzione

Strategia risolutiva

Fissiamo un sistema di riferimento Oxy con O coincidente con la località A, l'asse delle ascisse puntato nella direzione A-Est, l'asse delle ordinate puntato nella direzione A-Nord. In questo sistema rappresentiamo i vettori delle velocità:

$\vec{V}_{vento} = \vec{V}_\tau$: vettore della velocità del vento rispetto al suolo;

$\vec{V}_{aereo} = \vec{V}_r$: vettore della velocità dell'aereo rispetto all'aria.

$\vec{V}_a$: vettore della velocità risultante che l'aereo avrà rispetto al suolo.

Per la composizione dei moti risulta

$$\vec{V}_a = \vec{V}_\tau + \vec{V}_r$$

I tre vettori indicati hanno tutti il primo estremo nell'origine di riferimento con

a) il vettore $\vec{V}_\tau$ che ha la direzione della bisettrice del secondo e quarto quadrante e giace nel quarto quadrante;
b) il vettore $\vec{V}_r$ giace nel secondo quadrante del riferimento e forma con l'asse positivo delle ordinate l'angolo acuto β e con l'asse positivo delle ascisse l'angolo $\alpha=90°+\beta$;
c) il vettore $\vec{V}_a$ giace sull'asse delle ordinate e punta nel verso delle ordinate positive.

Scrivendo le espressioni cartesiane dei vettori $\vec{V}_\tau$, $\vec{V}_r$, tenendo conto dei relativi moduli, si determina l'espressione cartesiana del vettore $\vec{V}_a$; basterà imporre che sia nulla la componente lungo l'asse delle ascisse del vettore $\vec{V}_a$ per ricavare l'ampiezza dell'angolo β.

Elaborazioni

1) Espressioni cartesiane dei vettori.

$$\left|\overrightarrow{V_\tau}\right| = 120 Km/h \rightarrow \overrightarrow{V_\tau} = 120\left(\frac{Km}{h}\right)\cos 315° \cdot \vec{i} + 120\left(\frac{Km}{h}\right) sen 315° \cdot \vec{j} = 120\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{i} +$$
$$120\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{j} = 60\sqrt{2}\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{i} - 60\sqrt{2}\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{j};$$

$$\left|\overrightarrow{V_r}\right| = 600 Km/h \rightarrow \overrightarrow{V_r} = 600\left(\frac{Km}{h}\right)\cos\alpha \cdot \vec{i} + 600\left(\frac{Km}{h}\right) sen\alpha \cdot \vec{j} = 600\left(\frac{Km}{h}\right)\cos(90° + \beta)\cdot \vec{i} +$$
$$600\left(\frac{Km}{h}\right) sen(90° + \beta)\cdot \vec{j} = -600\left(\frac{Km}{h}\right) sen\beta \cdot \vec{i} + 600\left(\frac{Km}{h}\right)\cos\beta \cdot \vec{j};$$

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_\tau} + \overrightarrow{V_r} = 60\sqrt{2}\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{i} - 60\sqrt{2}\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{j} + \left(-600\left(\frac{Km}{h}\right) sen\beta \cdot \vec{i} + 600\left(\frac{Km}{h}\right)\cos\beta \cdot \vec{j}\right) =$$
$$\left(60\sqrt{2} - 600 sen\beta\right)\left(\frac{Km}{h}\right)\vec{i} + \left(-60\sqrt{2} + 600\cos\beta\right)\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{j}$$

Imponiamo che sia nulla la componente cartesiana lungo l'asse x del vettore $\overrightarrow{V_a}$ e risolviamo l'equazione che si ottiene nell'incognita β.

$60\sqrt{2} - 600 sen\beta = 0$ da cui $sen\beta = \frac{\sqrt{2}}{10}$, quindi $\beta = arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \approx 8{,}130° = 8°07'49''$

Il pilota deve puntare la rotta nella direzione Nord-8°07'49''-Ovest.

Calcolo della velocità dell'aereo rispetto al suolo

Il vettore velocità $\overrightarrow{V_a}$ ha espressione cartesiana

$$\overrightarrow{V_a} = \left(-60\sqrt{2} + 600\cos\beta\right)\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{j}$$

ed essendo

$$\cos\beta = \sqrt{1 - sen^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

si ricava

$$\overrightarrow{V_a} = \left(-60\sqrt{2} + 600\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{j} = 360\sqrt{2}\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{j} \approx 509{,}12\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot \vec{j}$$

L’aereo procede con velocità rispetto al suolo pari a 509,12(Km/h).

2) Il tempo impiegato per raggiungere la località B sarà

$$\Delta t = \frac{800Km}{509{,}12Kmh^{-1}} \approx 1^h 34^{\min} 17^s \ .$$

Segue la figura.