

Moto di un proiettile

Tuffo in piscina scendendo da una piattaforma

Problema

(Un tuffo in piscina) Giorgio per tuffarsi in piscina scende giù da una piattaforma piana inclinata di 30° rispetto al piano orizzontale. La cima della piattaforma è a 4m sopra l'estremo finale da cui Giorgio spicca il salto in acqua. La velocità iniziale con cui Giorgio inizia a scivolare è nulla. Trascurando ogni forma di attrito e sapendo che Giorgio entra in acqua a distanza 5m dalla verticale del punto di lancio, determinare

- Il modulo della velocità con cui Giorgio abbandona la piattaforma;
- l'altezza del punto di lancio rispetto alla superficie dell'acqua;
- il modulo della velocità con cui Giorgio entra in acqua.
- Scrivere in un opportuno sistema di riferimento cartesiano xOy l'equazione cartesiana della traiettoria descritta da Giorgio dal momento in cui abbandona la piattaforma di lancio e precisare quanto tempo egli rimane sospeso in aria (tempo di volo).

Elaborazioni

- Il moto di Giorgio mentre scende dalla piattaforma inclinata è rettilineo uniformemente accelerato; il modulo dell'accelerazione è pari a metà dell'accelerazione di gravità:

$$a = \frac{1}{2}g \approx 4,91 \frac{m}{s^2}.$$

La lunghezza della piattaforma è doppia dell'altezza della stessa, quindi $l=2h=8m$.

La velocità V_0 con cui Giorgio abbandona la piattaforma di lancio è

$$V_0 = \sqrt{2al} = \sqrt{2 \cdot 4,91 \frac{m}{s^2} \cdot 8m} \approx 8,86 \frac{m}{s}$$

- Per lo studio del volo di Giorgio si può adottare il sistema di riferimento spazio-temporale avente
 - come asse delle ascisse quello giacente sul piano della superficie dell'acqua della piscina e orientato concordemente con la componente orizzontale della velocità \vec{V}_0 con cui Giorgio abbandona la piattaforma;
 - come asse delle ordinate la verticale per il punto di lancio (base della piattaforma) e orientato verso l'alto.

Poniamo uguale a zero l'istante in cui si verifica il distacco dalla piattaforma.

Sia h l'altezza del punto di lancio rispetto alla superficie dell'acqua e d la distanza del punto di ingresso in acqua rispetto alla verticale del punto di lancio. Eseguendo le elaborazioni si ricava

$$h = \frac{2d^2g}{3V_0^2} + \frac{d}{\sqrt{3}} \approx 4,97m$$

- c. Sia V_f il modulo della velocità con cui Giorgio entra in acqua. Con i simboli già introdotti risulta

$$V_f = \sqrt{V_0^2 + 2gh} \approx \sqrt{8,86^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 4,97} \frac{m}{s} \approx 13,27 \frac{m}{s}$$

- d. Leggi orarie della traiettoria descritta da Giorgio durante il volo.

Nel sistema di riferimento spazio-temporale fissato nella risoluzione del precedente punto (b.) le equazioni orarie della posizione istantanea durante il volo sono:

$$\begin{cases} x = V_{0x}t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t + h \end{cases}, \text{ con } V_{0y} = -\frac{V_0}{2}$$

Ponendo $y=0$ si determina l'istante in cui Giorgio entra in acqua e si ha

$$gt^2 + V_0t - 2h = 0, \text{ da cui si ricava l'istante } t = \frac{-V_0 + \sqrt{V_0^2 + 8gh}}{2g} \approx 0,65s.$$

Pertanto, Giorgio rimane sospeso in aria circa 0,65s. Le equazioni della posizione istantanea di Giorgio durante il volo sono

$$\text{cioè } \begin{cases} x = 8,86 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81t^2 - 8,86 \cdot \frac{1}{2}t + 4,97 \end{cases}, \text{ semplificate nella forma}$$

$$\begin{cases} x = 4,43 \cdot \sqrt{3}t \\ y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81t^2 - 4,43t + 4,97 \end{cases}, \text{ con } 0 \leq t \leq 0,65s$$

Equazione cartesiana

La traiettoria descritta è un arco di parabola la cui equazione cartesiana si ottiene ricavando dall'espressione dell'ascissa istantanea il tempo t e sostituendolo nell'espressione dell'ordinata. Una volta eseguite le semplificazioni si ricava

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(\frac{x}{4,43 \cdot \sqrt{3}} \right)^2 - \frac{x}{\sqrt{3}} + 4,97, \text{ con } 0 \leq x \leq 5.$$

Riportiamo una rappresentazione grafica illustrativa del moto di Giorgio.

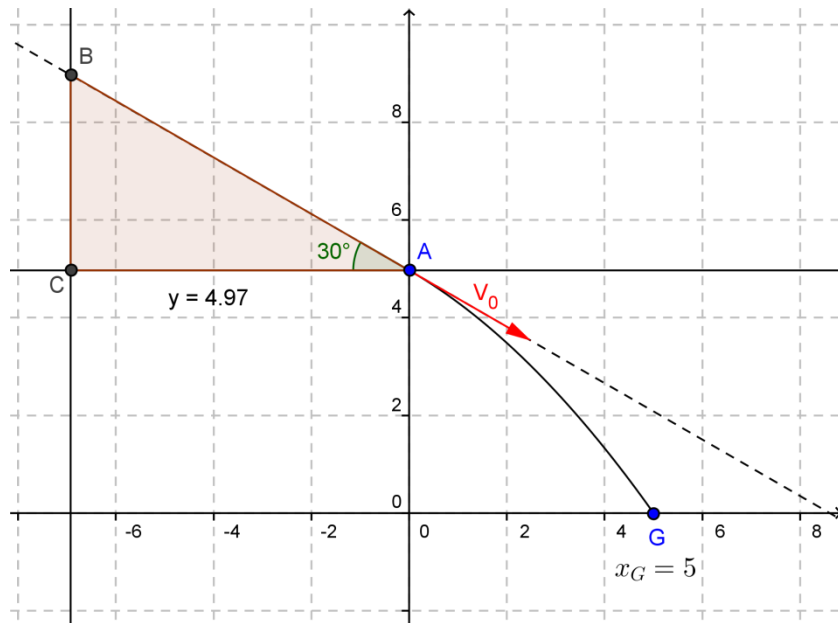


Figura 1- Giorgio descrive il percorso $B \rightarrow A \rightarrow G$. Il tratto $B \rightarrow A$ è rettilineo ed è descritto con moto uniformemente accelerato, $a = g/2$; il tratto $A \rightarrow G$ è un arco di parabola.