# Moto di un proiettile

## ed equazione cartesiana della traiettoria

**Problema**

Da una torre alta 25m, situata su una scogliera alta 30m rispetto alla superficie del mare, viene sparato un proiettile con velocità di 40m/s con angolo di alzo di 45° rispetto al piano orizzontale. Risolvere i quesiti che seguono.

a. Stabilire dopo quanti secondi dallo sparo il proiettile raggiunge la massima altezza.
b. Scrivere le leggi orarie della posizione istantanea del proiettile in un opportuno sistema di riferimento cartesiano.
c. Determinare la quota massima raggiunta dal proiettile rispetto alla superficie del mare.
d. Calcolare il tempo di volo e la gittata del proiettile.
e. Scrivere l'equazione cartesiana della traiettoria descritta e fornire una rappresentazione della stressa.

**Soluzione**

Adottiamo il sistema cartesiano di riferimento xOy avente l'asse x sulla superficie del mare ed orientato nel verso della componente orizzontale della velocità iniziale del proiettile, l'asse delle ordinate coincidente con la verticale del punto di lancio, orientato verso l'alto; l'origine O è il punto di intersezione dei due assi.

a. Nel sistema di riferimento adottato, detto $V_0$ il modulo della velocità di lancio e nell'ipotesi che sia t=0s l'istante iniziale, l'espressione della componente cartesiana verticale della velocità istantanea del proiettile è

$V_y = V_0 sen45° - gt$, essendo $g=9.81 m/s^2$ l'accelerazione di gravità.

Osserviamo che nell'istante in cui il proiettile raggiunge la massima quota la velocità dello stesso ha nulla la componente verticale, quindi si determina il suddetto istante risolvendo l'equazione

$V_0 sen45° - gt = 0$, da cui $t = \dfrac{V_0 sen45°}{g} = \dfrac{40ms^{-1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{9,81ms^{-2}} \approx 2,88s$

b. Nel riferimento spazio-temporale adottato le leggi orarie dell'ascissa e dell'ordinata del proiettile sono

$$x = V_0 \cos 45° \cdot t = 40\frac{m}{s}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}t = 20\sqrt{2}\left(\frac{m}{s}\right)\cdot t\,,$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sen45°\cdot t + h = -\frac{1}{2}gt^2 + 20\sqrt{2}\left(\frac{m}{s}\right)\cdot t + h\,,$$

dove h=(25+30)m=55m, $g=9,81 m/s^2$.

c. Il valore della quota massima raggiunta dal proiettile si ottiene ponendo nella legge della quota $t = \frac{V_0 sen 45°}{g} = 2{,}88s$ . Si ha

$$y_{\max} = -\frac{1}{2} g \left( \frac{V_0 sen 45°}{g} \right)^2 + V_0 sen 45° \cdot \frac{V_0 sen 45°}{g} + h = \frac{V_0^{\,2} sen^2 45°}{2g} + h$$

Da cui

$$y_{\max} = \frac{40^2 m^2 \cdot s^{-2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{2 \cdot 9{,}81 m \cdot s^{-2}} + 55m \approx 95{,}77m .$$

d. Per calcolare il tempo di volo basta risolvere l'equazione che si ottiene uguagliando a zero la quota del proiettive.

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 sen 45° \cdot t + h = 0$ , da cui $g t^2 - 2V_0 sen 45° \cdot t - 2h = 0$

L'equazione ottenuta è di secondo grado e ammette due radici, delle quali una è negativa e l'altra positiva; il valore del tempo di volo è quello della radice positiva (il valore della radice negativa nel contesto del problema in esame non ha alcun significato fisico).

$$t_{volo} = \frac{V_0 sen 45° + \sqrt{(V_0 sen 45°)^2 + 2gh}}{g} \approx 7{,}30s$$

**Calcolo della gittata**

Il valore della gittata si ottiene sostituendo il valore del tempo di volo nell'espressione dell'ascissa istantanea del proiettile. Si ha:

$$x_G = V_0 \cos 45° \cdot t_{volo} \approx 40 \frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7{,}30s \approx 206{,}48m$$

e. Osserviamo che le leggi orarie della posizione del proiettile, ascissa e ordinata,

$\begin{cases} x = V_0 \cos 45° \cdot t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 sen 45° \cdot t + h \end{cases}$ , cioè $\begin{cases} x = 20\sqrt{2} \left( \frac{m}{s} \right) \cdot t \\ y = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \left( \frac{m}{s^2} \right) t^2 + 20\sqrt{2} \left( \frac{m}{s} \right) \cdot t + 55m \end{cases}$ , con $0 \le t \le t_{volo}$ ,

sono una rappresentazione parametrica della traiettoria descritta. Per ottenere l'equazione cartesiana della curva è sufficiente eliminare la presenza del parametro t (tempo) e per questo basta ricavare t dalla prima equazione e sostituirlo nella seconda. Si ha

$t = \frac{x}{20\sqrt{2} m s^{-1}}$ e

$$y = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\left(\frac{m}{s^2}\right)\left(\frac{x}{20\sqrt{2}ms^{-1}}\right)^2 + 20\sqrt{2}\left(\frac{m}{s}\right)\cdot\left(\frac{x}{20\sqrt{2}ms^{-1}}\right) + 55m$$ , quindi

$y = -\frac{9{,}81}{1600}x^2 + x + 55$, con $x$ espresso in metri e variabile nell'intervallo $0 \le x \le x_G$ .

Rappresentazione della traiettoria