

Moto rettilineo vario

Un'auto, partendo da ferma, accelera per 8s con accelerazione $a=3,5\text{m/s}^2$, quindi procede con velocità di modulo costante pari a quello della velocità raggiunta al termine dell'accelerazione. Questa fase del moto dura 2 minuti allorché l'auto giunge in prossimità dell'arrivo e il conducente inizia a frenare uniformemente impiegando 14s per arrestare l'auto.

Quesiti

- 1) Scrivere la legge oraria della velocità dell'auto nella fase di accelerazione e in quella di frenata.
- 2) Rappresentare in un opportuno sistema di riferimento (t,V) il diagramma della legge $V(t)$, per tutta la durata del moto.
- 3) Determinare la velocità media \bar{V}_1 dell'auto nella fase di accelerazione e quella \bar{V}_3 nella fase di frenata. Detto V_2 il valore della velocità dell'auto nella fase centrale del moto, calcolare la media aritmetica V_{ar} dei valori $\bar{V}_1, V_2, \bar{V}_3$.
- 4) Determinare la lunghezza complessiva della traiettoria dell'auto e il corrispondente valore della velocità media V_m e verificare che detto valore è diverso da V_{ar} .

Soluzione

Premessa

Riteniamo che il moto dell'auto sia rettilineo e assimiliamo l'auto stessa ad un punto. Assumiamo come riferimento per la posizione x dell'auto un asse orientato nel verso del moto, con origine nella posizione iniziale dell'auto. Per la misura del tempo fissiamo $t=0\text{s}$ come istante iniziale.

- 1) **Fase di accelerazione** - Il moto è rettilineo uniformemente accelerato. La legge oraria della velocità dell'auto è $V=at$, quindi

$$V=3,5t, \text{ con } 0 \leq t \leq 8\text{s} \quad (1)$$

Alla fine dell'accelerazione il valore della velocità è

$$V_{1f} = 3,5 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot 8\text{s} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.1)$$

Fase di frenata - La frenata ha inizio nell'istante $t=8\text{s}+2 \cdot 60\text{s}=128\text{s}$. La velocità iniziale è

$V_{1f} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Indichiamo con a_3 il modulo della decelerazione costante subita dall'auto e con

$V_3(t)$ la componente scalare della velocità nell'istante t nel riferimento adottato. La legge oraria della velocità è

$$V_3(t) = -a_3(t-128) + V_{1f}, \text{ con } 128\text{s} < t \leq 142\text{s}. \quad (2)$$

Possiamo determinare il valore di a_3 imponendo nella (2) che per $t=142s$ la velocità sia nulla, con $V_{1f} = 28 \frac{m}{s}$. Si ottiene

$$a_3 = \frac{V_{1f}}{(142-128)s} = \frac{28m/s}{(142-128)s} = 2 \frac{m}{s}$$

La legge oraria della velocità nella fase di frenata è perciò

$$V_3(t) = -2(t-128) + 28, \text{ cioè } V_3(t) = -2t + 284, \text{ con } 128s < t \leq 142s \quad (2.1)$$

- 2) Il diagramma della legge oraria della velocità per tutta la durata del moto è riportato in **Figura 1**.

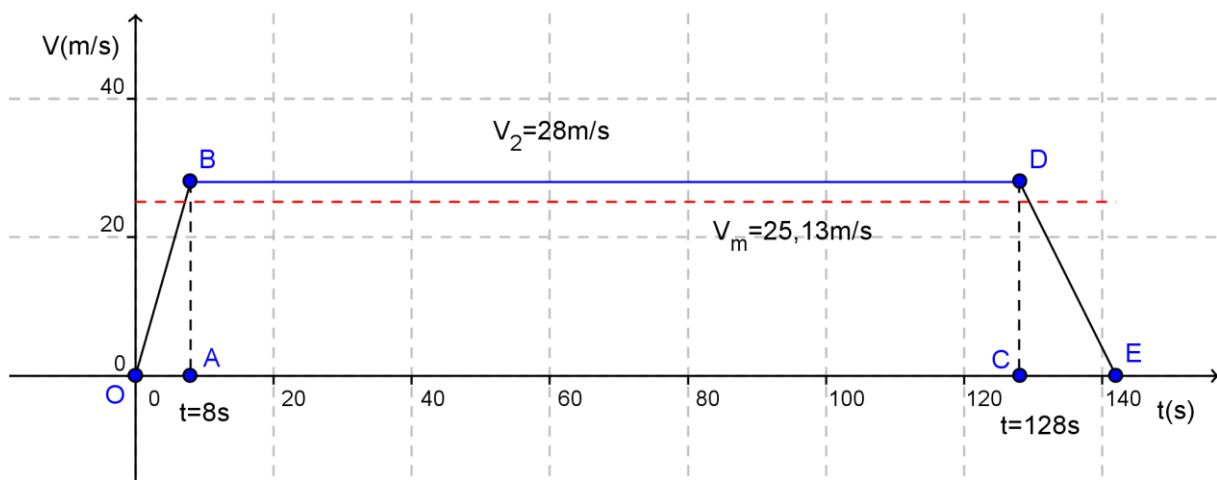


Figura 1- Diagramma della legge oraria della velocità in tutta la durata del moto. Osserviamo che nella fase centrale del moto la velocità mantiene il valore costante di 28m/s.

- 3) **Velocità media nella fase di accelerazione**

Possiamo ricordare che **nel moto ad accelerazione costante**, indipendentemente se trattasi di moto accelerato o di moto decelerato, **si può dimostrare che il valore della velocità media è uguale alla media aritmetica tra il valore iniziale e quello finale della velocità**. Nel nostro caso si ha

$$\bar{V}_1 = \frac{V_{i1} + V_{1f}}{2} = \frac{(0+28)m/s}{2} = 14m/s$$

Velocità media nella fase di frenata

Per quanto precisato sopra, la velocità media nella fase di frenata è ancora pari a 14m/s.

La **media aritmetica** richiesta è

$$V_{ar} = \frac{\bar{V}_1 + V_{1f} + \bar{V}_3}{3} = \frac{(14+28+14)m/s}{3} \approx 18,67m/s \quad (3)$$

Osservazione sui valori delle velocità nella fase di accelerazione e in quella di decelerazione

Per calcolare la velocità media nella fase di accelerazione si può procedere anche diversamente rispetto a come indicato. Si può utilizzare il diagramma orario (t,V) e calcolare la lunghezza della traiettoria ΔS_1 descritta dall'auto e dividere il valore per il tempo $\Delta t_1=8s$ impiegato per l'accelerazione. Il valore di ΔS_1 coincide numericamente con l'area del triangolo OAB riportato in figura. Analogamente, per il calcolo della velocità media nella fase di decelerazione si può determinare la lunghezza ΔS_2 della traiettoria descritta calcolando l'area del triangolo CDE e dividere il risultato per l'ampiezza $\Delta t_2 = 14s$ dell'intervallo di frenata.

Lasciamo al lettore il compito di verificare che i valori ottenuti per \bar{V}_1 e \bar{V}_3 coincidono e valgono 14m/s.

4) La lunghezza del percorso è la somma della misura ΔS_1 del tratto descritto nella fase di accelerazione, con la misura ΔS_2 del tratto descritto con velocità di modulo costante, e la misura ΔS_3 del tratto descritto nella fase di frenata. Le tre misure $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ possono essere ottenute utilizzando il diagramma orario V(t) riportato sopra. Infatti, come indicato anche nella precedente osservazione relativa al quesito n.3, si tratta di calcolare: l'area del triangolo OAB per ΔS_1 , l'area del rettangolo ACDB per ΔS_2 , l'area del triangolo CDE per ΔS_3 .

Dunque

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 8s \cdot 28 \frac{m}{s} = 112m; \quad \Delta S_2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} = 120s \cdot 28 \frac{m}{s} = 3360m;$$

$$\Delta S_3 = \frac{1}{2} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 14s \cdot 28 \frac{m}{s} = 196m. \quad \Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 3668m$$

Velocità media su tutto il percorso

Per definizione il valore della velocità (scalare) media su tutto il percorso è il rapporto tra la lunghezza della traiettoria e la durata del moto. Quindi

$$V_m = \frac{3668m}{142s} \simeq 25,83 \frac{m}{s} \quad (4)$$

Come si vede risulta $V_{ar} \neq V_m$, come previsto nel testo del problema.