Moto rettilineo non uniforme

Problema[1]

La posizione di una particella in funzione del tempo è $x=(2{,}0m/s)t-(3{,}0m/s^3)t^3$.

a) Costruisci con una calcolatrice grafica il diagramma relativo all'intervallo fra t =0s e t=1,0s.

b) Determina la velocità media della particella nell'intervallo tra t=0,35s e t=0,45s.

c) Determina la velocità media della particella nell'intervallo tra t=0,39s e t=0,41s.

d) Ti aspetti che la velocità istantanea in t= 0,40s sia più prossima a 0,54m/s , a 0,56m/s o a 0,58ms?

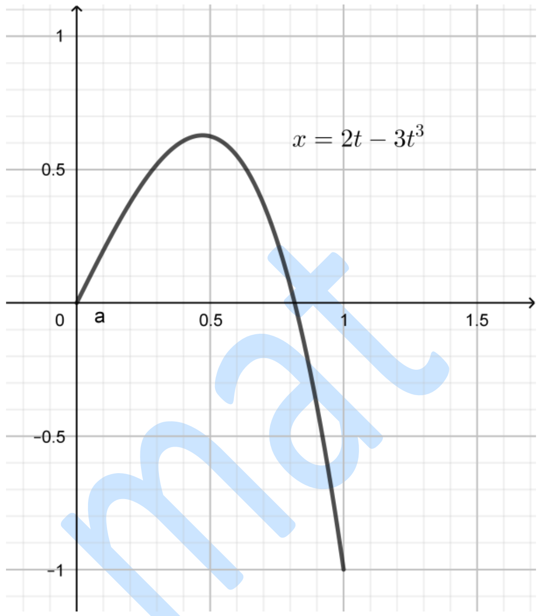

Figura 1-Legge oraria dell'ascissa della particella in funzione del tempo. L'inversione del moto avviene poco prima dell'istante t=0,5s.

Elaborazioni

a) Dalla legge oraria del moto $x=2t-3t^3$

si evince che la particella avviene lungo una retta; per indagare sulle sue caratteristiche fissiamo un sistema di riferimento spazio-temporale nel quale nell'istante t=0s la particella è nell'origine O del riferimento.

Per realizzare il diagramma cartesiano relativo all'intervallo [0s;1s] è necessario determinare alcuni suoi punti. Determiniamo i punti corrispondenti agli istanti che si ottengono da t=0s con incremento di Δt=0,1s. I valori delle ascisse e delle corrispondenti ordinate sono riportati in Tab.1. In Figura 1 è riportato il diagramma della legge oraria.

Tab.1 t in (s)	X in metri
0	0
0,1	0,197
0,2	0,376
0,3	0,519
0,4	0,608
0,5	0,625
0,6	0,552
0,7	0,371
0,8	0,064
0,9	-0,387
1	-1

Dall'analisi dei valori dell'ascissa x della posizione si evince che la particella procede nel verso crescente delle ascisse approssimativamente fino all'istante t=0,5s , quindi inverte il moto nel verso negativo. Si osserva che subito dopo l'istante t=0,8s la particella si trova a sinistra dell'origine O(punto in cui è iniziata l'osservazione). Ciò si deduce dal valore negativo dell'ascissa.

Osservando il diagramma della legge oraria si possono ricavare ulteriori dettagli sul moto. Si può osservare, ad esempio, che la distanza massima dall'origine O raggiunta dalla particella per t>0s si verifica in un istante t compreso tra 0,4s e 0,5s. Si possono determinare posizioni più precise della particella riducendo l'ampiezza dell'incremento temporale Δt (confrontare quanto riportato nel successivo punto (b)).

[1] Il testo di questo problema è riportato come n.15, a pag.290 nel Volume James S. Walker- Fisica Modelli teorici e problem solving (primo biennio) -Editr. Linx

b) Velocità media della particella nell'intervallo [0,35(s);0,45(s)]

Le posizioni della particella nell'intervallo [0(s);0,45(s)] sono riportate in Tab.2, nella quale, a partire dall'istante t=0,3s, è stato assunto come incremento temporale Δt=0,01s.

Tab.2 t(s)	x(m)
0	0
0,1	0,197
0,2	0,376
0,3	0,519
0,31	0,530627
0,32	0,541696
0,33	0,552189
0,34	0,562088
0,35	0,571375
0,36	0,580032
0,37	0,588041
0,38	0,595384
0,39	0,602043
0,4	0,608
0,41	0,613237
0,42	0,617736
0,43	0,621479
0,44	0,624448
0,45	0,626625

Calcolo della velocità media

Dalla Tabella 2 si deduce che nell'intervallo di tempo [0(s);0,45(s)] la particella si muove nel verso positivo delle ascisse. Il **valore della velocità scalare media** nell'intervallo [0,35(s);0,45(s)] è dato dal rapporto tra lo spostamento Δx subito dalla particella e il tempo Δt impiegato. Quindi:

$$V_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(0,45s) - x(0,35s)}{(0,45 - 0,35)s} = \frac{(0,627 - 0,571)m}{0,10s} = \frac{0,056m}{0,10s} = 0,56m/s$$

c) Velocità media nell'intervallo [0,39(s);0,41(s)]

Con analogo calcolo eseguito per l'intervallo [0,35(s);0,45(s)] si determina il valore della velocità media della particella nell'intervallo [0,39(s);0,41(s)].

$$V_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(0,41s) - x(0,39s)}{(0,41 - 0,39)s} = \frac{(0,613 - 0,602)m}{0,02s} = \frac{0,011m}{0,02s} = 0,55m/s$$

d) Stima della velocità istantanea per t=0,40s

Osserviamo che l'istante t=0,40s è l'istante centrale tra i due estremi dell'intervallo [0,39(s);0,41(s)] per il quale è stato determinato il valore medio della velocità scalare nel precedente punto (c). Quindi abbiamo acquisito che il valore della velocità nell'istante t=0,40s è circa 0,55m/s. Per determinare un valore approssimato migliore per la velocità istantanea nell'istante t=0,40s possiamo ridurre l'ampiezza Δt dell'intervallo in cui ricade l'istante t=0,40s . Per esempio, possiamo prendere Δt=0,005s assumendo i due istanti t_1=0,395s, t_2=0,405s.

I valori delle ascisse della particella nei suddetti istanti sono

x(0,395s)=0,60511s; x(0,405s)=0,61071s

e quindi il valore della velocità media è:

$$V'_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(0,405s) - x(0,395s)}{(0,405 - 0,395)s} = \frac{(0,61071 - 0,60511)m}{0,01s} = \frac{0,0056m}{0,01s} = 0,56m/s$$

Concludiamo che il valore della velocità istantanea nell'istante t=0,40s è più prossimo al valore 0,56m/s.

(Confrontare quanto riportato nel successivo approfondimento)

Approfondimento[2]

Metodo analitico per la **velocità istantanea** (applicazione del concetto di derivata)

La legge della velocità istantanea della particella è la seguente

$V(t)=2-9t^2$,

per cui **nell'istante t=0,40s il valore effettivo della velocità** è

$V(t=0{,}40s)=(2-9*0{,}4^2)(m/s)=0{,}56\ m/s$

Confronto tra velocità media nell'intervallo [0,39s;0,41(s)] e velocità istantanea nell'istante t=0,40s.

Possiamo scrivere l'equazione della retta r secante il grafico (spazio-tempo) nei punti A e B relativi rispettivamente agli istanti t=0,39s , t=0,41s , assumendo per gli stessi come ordinate i valori riportati nella Tab.2 , approssimati alla terza cifra decimale. I punti nel riferimento sono: A(t=0,39s;0,602m) e B(5=0,41s;0,613m). La retta ha equazione

r:**-t+2x=1**

ed il suo coefficiente angolare è m=-(-1)/2=0,5. Questo valore fornisce un'approssimazione della velocità media V=0,55(m/s) della particella nell'intervallo [0,39s;0,41(s)], che abbiamo calcolato nel precedente punto (c).

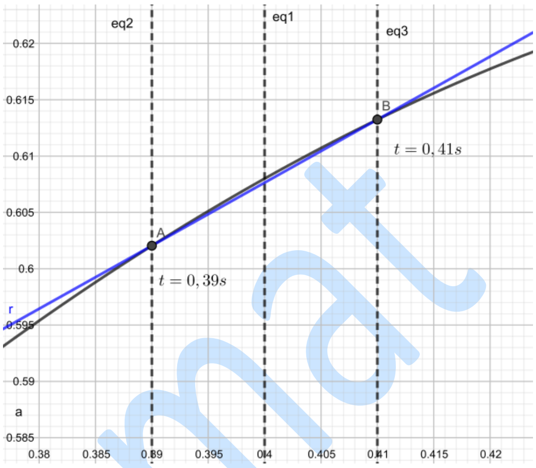

Figura 2- La retta r passante per i punti A e B è secante il grafico spazio-tempo e nell'intervallo [0,39s;0,41s] si discosta pochissimo da quello del grafico del moto. La pendenza della retta, detta coefficiente angolare, il cui valore è 0,5, rappresenta la velocità media della particella nell'intervallo [0,39s;0,41s] e approssima molto bene il valore della velocità istantanea nell'istante t=0,40s, che è il centro dell'intervallo.

Il diagramma riportato in Figura 2 è un ingrandimento di 100 volte di quello riportato n Figura 1. Infatti, l'unità minima di incremento temporale in Figura 1 è 0,1s, in Figura 2 è 0,001s. Ciò permette di confrontare il segmento della retta passante per i punti A(t=0,39s;0,602m) e B(5=0,41s;0,613m) con il diagramma della legge oraria del moto in esame. Si riconosce la "notevole vicinanza" tra il segmento AB e l'arco AB della curva della legge oraria.

Aggiungiamo un'ultima considerazione.

La velocità istantanea nell'istante t_0 di un punto materiale che si muova di moto rettilineo, di cui sia nota la legge oraria $x(t)$,è il valore della derivata prima di detta funzione

$$x'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

calcolata nell'istante t_0 . Nella rappresentazione cartesiana della legge oraria, detto $P_0(t_0\,;x(t_0))$ il punto del grafico della legge oraria corrispondente all'istante t_0 , il valore della velocità istantanea nell'istante t_0 coincide con il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $P_0(t_0\,;x(t_0))$.

[2] Quanto riportato in questo approfondimento può essere opportunamente fruito dagli studenti del triennio conclusivo di un Istituto di Istruzione Secondaria.