Trigonometria

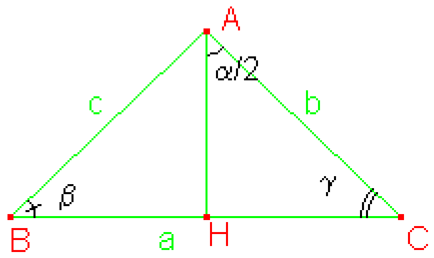
Problema[1]

Dato il triangolo ABC, e indicate con a, b, c rispettivamente le misure dei lati BC, AC, AB e con α, β, γ le ampiezze degli angoli nei vertici A,B,C, dimostrare che:

1. se il triangolo è isoscele sulla base BC allora sussiste l'uguaglianza $a = 2bsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
2. se nel triangolo ABC sussiste l'uguaglianza $a = 2bsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ allora non necessariamente il triangolo è isoscele.

Soluzione

Facciamo riferimento alla figura riportata lato, nella quale sono stati denominati gli elementi caratteristici con le lettere usuali, per altro riportate nella traccia del problema ed il triangolo rappresentato è isoscele sulla base BC.



1. Avendo supposto che il triangolo è isoscele su BC, detto H il punto medio di BC, è noto che AH è anche perpendicolare a BC, nonché bisettrice dell'angolo nel vertice A. Dalle relazioni tra i lati per un triangolo rettangolo possiamo scrivere

   $$\overline{CH} = \overline{AC} \cdot sen\left(C\hat{A}H\right) = bsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

   e dunque si ha $a = \overline{BC} = 2\overline{CH} = 2bsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

   e la tesi è acquisita.

2. Partiamo ora dalla sussistenza dell'uguaglianza $a = 2bsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e proviamo che non necessariamente il triangolo è isoscele.

   Infatti, facciamo notare che in ogni triangolo sussiste il teorema dei seni, formalizzato dalla seguente catena di uguaglianze:

   $$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{seb\beta} = \frac{c}{sen\gamma} \qquad (1)$$

   Ricordata la formula di duplicazione

   $$sen\alpha = 2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (2)$$

   e tenendo presente la validità della relazione ipotizzata $a = 2bsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, possiamo scrivere

   $$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{2bsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{b}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

   e quindi anche

[1] Problema proposto dall'utente del sito Paolo Uguagliati

$$\frac{b}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$$

dalla quale si deduce l'uguaglianza

$$sen\beta=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

D'altra parte, dagli archi associati $\frac{\alpha}{2}, 90°-\frac{\alpha}{2}$ possiamo anche scrivere

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=sen\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (3)$$

Si perviene dunque all'uguaglianza

$$sen\beta=sen\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (4)$$

Per le proprietà di cui gode la funzione sen*x*, è noto che la (4) è soddisfatta se e solo se sussiste tra gli angoli α e β una delle seguenti relazioni

$$\beta=90°-\frac{\alpha}{2}+k\cdot 360°, k\in\mathbb{Z}, \qquad (4.1)$$

$$\beta=180°-\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)+k\cdot 360°, k\in\mathbb{Z} \qquad (4.2)$$

Limitandoci a considerare per α e β valori compresi tra 0° e 180°, le due possibilità per gli angoli α e β sono

$$\beta=90°-\frac{\alpha}{2}, \quad \beta=180°-\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right),$$

che elaborate diventano rispettivamente

$\alpha+2\beta=180°$ (4.1.1) $\qquad 2\beta-\alpha=180°$ (4.2.1)

Ricordiamo, infine, che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, quindi che

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \qquad (5)$$

Ciò premesso, la (4.1.1) diventa:

$$180°-(\beta+\gamma)+2\beta=180° \rightarrow \beta=\gamma$$

e quindi per i valori di α eβ che verificano la (4.1.1) il triangolo ABC ha gli angoli nei vertici B e C uguali, dunque è isoscele.

Tenendo sempre conto della (5), la (4.2.1), seconda possibile relazione tra le misure di α e β, diventa

$$2\beta+(\beta+\gamma-180°)=180° \rightarrow \; 3\beta+\gamma=360° \qquad (4.2.2)$$

Si noti che esistono infiniti triangoli le ampiezze dei cui angoli verificano la relazione (4.2.2). **Vogliamo stabilire se fra essi ne esiste qualcuno che sia isoscele**.

Ebbene, se per il triangolo ABC

- richiediamo che sia β=γ, dalla (4.2.2) si ha 4β=360° →β=90° e quindi il triangolo dovrebbe avere due angoli retti (assurdo!);
- richiediamo che sia α=β, dalla (4.2.1) si ha 2α-α=180°, quindi α=180° e neanche questo caso è ammissibile (a meno che non si voglia considerare un triangolo degenere);
- richiediamo che sia α=γ, dalla validità delle altre due relazioni $2\beta-\alpha=180°$, $\alpha+\beta+\gamma=180°$, risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = 180° \\ 2\beta - \alpha = 180° \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma = 36° \\ \beta = 108° \end{cases}$$

Dunque esiste un solo triangolo isoscele che verifica la relazione $a = 2bsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e la condizione (4.2.1) ; il triangolo è isoscele sulla base AC.