Chiarimenti per E. A.

Continuità e derivabilità
esiste un modo per regolarsi?

La richiesta di aiuto:
Salve, mi chiamo E. A., sono uno studente di Ingegneria Civile alla Sapienza di Roma.
Sono al secondo anno ….
Vorrei sapere come si trova il dominio in una funzione integrale; l'insieme di continuità e derivabilità per le funzioni ad una variabile…..
Spero mi risponda….
La ringrazio in anticipo!

Risposta

1) La funzione integrale per una funzione di una variabile non è sempre definibile.
2) Data la funzione $f: A \to R$, con $A \subseteq R$, se A è un intervallo e la funzione è continua allora esiste senz'altro al funzione integrale di punto iniziale x_0 e si pone $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. La funzione integrale ovviamente sarà definita su tutto il dominio A della funzione di partenza ed ha la notevole proprietà di essere derivabile in ogni punto e la sua derivata prima coincide proprio con f(x). Quindi $\forall x \in A \to F'(x)=f(x)$.

Tenga presente che esiste la funzione integrale anche di una funzione definita in un intervallo [a;b] che nello stesso non sia continua ma che presenti solo un numero di finito di discontinuità di prima specie. La funzione integrale si definisce ricorrendo ai cosiddetti integrali generalizzati, per i quali occorre una trattazione apposita.

Non solo, anche per funzioni definite in domini in cui presentino discontinuità di seconda specie è possibile definire la funzione integrale, sempre ricorrendo agli integrali generalizzati. I casi che si possono presentare sono diversi.

Infine è possibile definire la funzione integrale anche per funzioni definite in domini che non siano intervalli. E qui il problema diventa più complesso.

Insieme di continuità e derivabilità per funzioni di una variabile.

Non esiste un'unica regola da seguire per determinare il dominio di continuità di una funzione. Lo studio va eseguito caso per caso. Ma tenga presente che alla base di ogni procedimento vi sono le proprietà delle funzioni elementari che penso Lei conosca bene. Riporto alcune funzioni elementari: f(x)=k, f(x)=x, f(x)=ax+b, f(x)=P(x), con P(x) polinomio di qualsiasi grado, f(x)=senx, f(x)=cosx, f(x)=tgx, …, f(x)=a^x, f(x)=logx, f(x)=arcsenx, f(x)=arcocosx, f(x))=arctgx,…,f(x)=1/x, f(x)=x^λ,.. $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{ax+b}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$. L'elenco potrebbe continuare.

E' importante ricordare che ogni funzione elementare in ciascun punto in cui è definita è continua. Questa affermazione, che è un teorema, si dimostra dopo avere sviluppato i necessari teoremi sui limiti.

Lo studio della continuità di una funzione che non sia elementare va effettuato tenendo presente la struttura della particolare funzione in esame.

E' inutile che aggiunga altro su questo argomento.

Per quanto concerne la derivabilità di una funzione, voglio far presente che spesso gli studenti pensano di risolvere il quesito determinando l'espressione della funzione derivata prima della funzione assegnata, quindi trovano il dominio della derivata prima e concludono che questo insieme è il dominio di derivabilità della funzione di partenza. Questo procedimento è errato. Le faccio un esempio. La funzione f(x)=logx è definita nell'intervallo]0;+∞[, è continua e derivabile in ogni punto del dominio e la sua derivata prima è la funzione f'(x)=1/x. Quest'ultima funzione è però definita per ogni x reale diverso da zero, ma certamente questo insieme non è quello di derivabilità della funzione logx.

Mi fermo qui.
In bocca al lupo per gli studi.
Prof. Luigi Lecci