

Studio di Funzione

Funzione razionale fratta dispari

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$, determinandone il dominio e precisando se il diagramma presenta particolari simmetrie. Studiare quindi i limiti, determinare gli eventuali asintoti, precisare la monotonia, gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo o assoluto, la concavità e gli eventuali punti di flesso. Rappresentare il diagramma nel riferimento xOy.

Soluzione

- 1) **Dominio**- La funzione è razionale fratta ed è definita per i valori della variabile reale che non annullano il denominatore. Ponendo la condizione $2x^2 - 1 \neq 0$ si ricava che deve essere $x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Concludiamo che la funzione è definita nell'insieme: $A = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.
- 2) **Simmetrie**- Osserviamo che risulta $f(-x) = -f(x)$, quindi si tratta di una **funzione dispari** ed il suo diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi coordinati.
- 3) **Segno e zeri**

a. Il numeratore è positivo per $x > 0$, negativo per $x < 0$ e si annulla per $x = 0$.

b. Il denominatore assume segno negativo nell'intervallo $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$ ed è positivo in

ogni altro punto del dominio. Confrontando il segno del numeratore con quello del denominatore si conclude che la funzione è positiva nell'insieme

$$A_1 = \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right[\cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[, \text{ si annulla solo per } x=0 \text{ ed è negativa negli altri punti}$$

del dominio.

- 4) **Limiti** – Si devono studiare i limiti nei **punti di frontiera** del dominio che è:

$$F_r(A) = \left\{ -\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right\}. \text{ Tenendo conto della simmetria è sufficiente limitare lo}$$

studio solo nei due punti $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = +\infty$.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-} \frac{x^3}{2x^2 - 1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^+} \frac{x^3}{2x^2 - 1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^+} = +\infty$$

La retta di equazione $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è asintoto verticale a destra ed a sinistra per il grafico della funzione.

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

- c. Il diagramma della funzione ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$ come si evince dai limiti:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2} = m \quad (\text{coefficiente angolare dell'asintoto});$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x^2 - 1} = 0$$

L'asintoto obliquo è la retta di equazione $s: y = \frac{1}{2}x$.

5) **Monotonia, crescita e decrescenza, massimi e minimi relativi e/o assoluti.**

Dallo studio dei limiti si evince che la funzione non ammette né massimo, né minimo assoluti perché $\text{Sup}(f) = +\infty$, $\text{Inf}(f) = -\infty$. Determiniamo la funzione derivata prima e studiamone il segno per la monotonia.

$$f'(x) = \frac{x^2(2x^2 - 3)}{(2x^2 - 1)^2} \quad \text{Si riconosce che } f'(0) = 0, \text{ mentre risulta}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad \left(x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \right) \vee \left(x > \sqrt{\frac{3}{2}} \right);$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in \left] -\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}} \right[- \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$$

Conclusione

La funzione è strettamente crescente in ciascun punto in cui la derivata prima è positiva e strettamente decrescente in ciascun punto in cui la derivata prima è negativa; inoltre:

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{è punto di massimo relativo proprio e risulta } f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3\sqrt{6}}{8};$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{è un punto di minimo relativo proprio e risulta } f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{8}.$$

6) **Concavità e flessi**

La derivata seconda della funzione è $f''(x) = \frac{2x(2x^2 + 3)}{(2x^2 - 1)^2}$, che si annulla per $x=0$; per

quanto concerne il segno si ha:

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right[\cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[= S_1;$$

$f''(x) < 0$ negli altri punti del dominio.

Si conclude che la funzione ha un flesso nel punto $x=0$, ha la concavità rivolta verso l'alto (è convessa) nell'insieme S_1 ed è concava altrove.

Caratteristica del punto di flesso- La retta tangente nel punto $(0;0)$ di flesso è l'asse delle ascisse. In un opportuno intorno completo di detto punto il diagramma della curva si trova nel semipiano delle ordinate positive a sinistra e nel semipiano delle ordinate negative a destra, pertanto il punto è di flesso discendente.

Operatività con GeoGebra

Per il calcolo del valore della funzione in un punto, dopo aver inserito l'espressione della funzione, si può utilizzare l'etichetta associata dall'applicazione alla funzione. Così, per rappresentare il punto del diagramma corrispondente al **punto di minimo relativo** le cui

coordinate sono $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \right)$, si può scrivere nella barra della formula l'espressione

$(\sqrt{3/2}, f(\sqrt{3/2}))$; analogamente, per rappresentare il punto del diagramma corrispondente al punto di massimo relativo le cui coordinate sono $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$, si scrive nella barra della formula l'espressione $(-\sqrt{3/2}, f(-\sqrt{3/2}))$.

